Phys. Lab.

APR 10 1923

Physikalische Zeitschrift

Begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

Herausgeber:
Professor Dr. **M. Born** und
Professor Dr. **P. Debye**

Schriftleiter:
Dr. **Hans Küstner** in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von vierteljährlich 3000 Mark, bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband 4000 Mark, im Ausland Schweiz. Frcs. 9.— Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit 100.— Mark, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

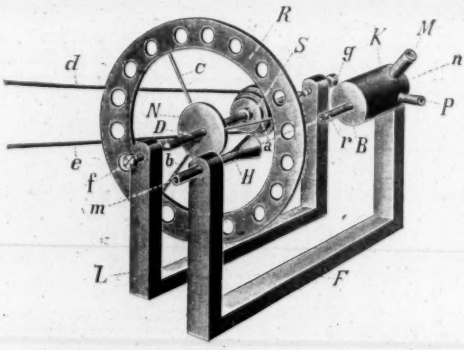
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten entweder an die Herausgeber: Professor Dr. M. Born, Göttingen, Planckstraße 21, und Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastr. 35 oder an die Schriftleitung: Dr. Hans Küstner, Göttingen, Bunsenstraße 9, Physikalisches Institut der Universität, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 4. 15. Februar 1923. No. 632. 24. Jahrgang.

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Normal-Sirene

zur

rationellen Messung von Tonstärken.

Katalog 30 erschienen und ebenso wie Spezialliste No. 29 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)

Seite

Atombau: Drei Aufsätze über Spektren und —, v. N. Bohr. (B.) 96
Atome: Die —, v. J. Perrin 96
Beleuchtungsazimutblende: Über die Anwendung einer — bei koaxialer Dunkelfeldbeleuchtung, v. A. Szegvári 91
Bohr, N., Drei Aufsätze über Spektren und Atombau. (B.) 96
Cauer, W., Das Verhalten der Maßstäbe in der allgemeinen Relativitätstheorie 87
Chemie: Einführung in die physikalische —, v. J. Walker. (B.) 95
Chlorwasserstoffmoleküle: Bestimmung der Dipollänge von — mittels Elektrostriktionsversuche, v. O. E. Frivold u. O. Hassel 82
Dichtebestimmungen: Nachtrag zu meiner Arbeit „— an Lösungen nebst Bestimmung der Dichteunterschiede zwischen Wasser und Wasser mit Luft gesättigt", v. O. E. Frivold 86
Dichteunterschiede: Nachtrag zu meiner Arbeit: „Dichtebestimmungen an Lösungen nebst Bestimmung der — zwischen Wasser und Wasser mit Luft gesättigt", v. O. E. Frivold 86

Seite

Differentialrechnung: Lehrbuch der — und Integralrechnung, nebst einer Einführung in andere Teile der Mathematik, v. H. A. Lorentz. (B.) 95
Dipollänge: Bestimmung der — von Chlorwasserstoffmolekülen mittels Elektrostriktionsversuche, v. O. E. Frivold u. O. Hassel 82
Dunkelfeldbeleuchtung: Über die Anwendung einer Beleuchtungsazimutblende bei koaxialer —, v. A. Szegvári 91
Elektrostriktionsversuche: Bestimmung der Dipollänge von Chlorwasserstoffmolekülen mittels —, v. O. E. Frivold u. O. Hassel 82
Emersleben, O., Zetafunktionen und elektrostatische Gitterpotentiale. I. Allgemeine Kraftfunktion . . 73
Erde: Die mechanischen Beweise für die Bewegungen der —, v. R. Grammel (B.) 96
Frivold, O. E. u. O. Hassel, Bestimmung der Dipollänge von Chlorwasserstoffmolekülen mittels Elektrostriktionsversuche 82
Frivold, O. E., Nachtrag zu meiner Arbeit „Dichtebestimmungen an Lösungen nebst Bestimmung der Dichteunterschiede zwischen Wasser und Wasser mit Luft gesättigt" (diese Zeitschr. 21, 529—534, 1920) 86
Gitterpotentiale: Zetafunktionen und elektrostatische —, I. Allgemeine Kraftfunktion, v. O. Emersleben . 73

Prismen, Linsen, Platten
aus
Kalkspat, Flußspat, Quarz, Steinsalz, Glas.
Gyps- und Glimmerpräparate.
Preisliste gratis.
B. Halle Nachfolger, Optisches Institut.
Berlin-Steglitz.

Zu verkaufen!
1 Influenzmaschine mit Experimentierkasten
fast neu.
Angebote unter **S. H. 619** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2, erbeten.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch
Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4. 15. Februar 1923. 24. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 6 am 5. März 1923.

INHALT.

Originalmitteilungen:

O. Emersleben, Zetafunktionen und elektrostatische Gitterpotentiale. I. S. 73.

A. Piccard u. E. Stahel, Über das *UV*. S. 80.

O. E. Frivold u. Odd Hassel, Bestimmung der Dipollänge von Chlorwasserstoffmolekülen mittels Elektrostriktionsversuche. S. 82.

O. E. Frivold, Nachtrag zu meiner Arbeit: Dichtebestimmungen an Lösungen nebst Bestimmung der Dichteunterschiede zwischen Wasser und Wasser mit Luft gesättigt. S. 86.

W. Cauer, Das Verhalten der Maßstäbe in der allgemeinen Relativitätstheorie. S. 87.

A. Szegvári, Über die Anwendung einer Beleuchtungsazimutblende bei koaxialer Dunkelfeldbeleuchtung. S. 91.

Besprechungen:

H. A. Lorentz, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung; nebst einer Einführung in andere Teile der Mathematik. S. 95.

J. Walker, Einführung in die physikalische Chemie. S. 95.

N. Bohr, Drei Aufsätze über Spektren und Atombau. S. 96.

J. Villey, Physique élémentaire et théories modernes. S. 96.

R. Grammel, Die mechanischen Beweise für die Bewegungen der Erde. S. 96.

J. Perrin, Die Atome. S. 96.

Personalien. S. 96.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zetafunktionen und elektrostatische Gitterpotentiale.

I. Allgemeine Kraftfunktion.

Von Otto Emersleben.

Nachdem Herr Madelung[1]) als erster die Aufbauarbeit[2]) des Steinsalzgitters berechnet hatte, gab Herr Ewald[3]) einen Weg an, der mittels gut konvergenter Reihen bei allen Gittern zum Ziel führt. Herr Born[4]) zeigte, daß bei würfelförmiger Ionenanordnung die Berechnung der Aufbauarbeit auf eine endliche Anzahl von Multiplikationen und Additionen zurückgeführt ist, sobald eine Funktion dreier Veränderlicher, das **Grundpotential** (im folgenden „Bornsches Grundpotential") in gewissen Punkten bekannt ist.

Auf eine mündliche Bemerkung von Herrn Born hin, daß es erwünscht sei, die Ausdehnung seiner Überlegungen auf schiefwinklige Gitter zu versuchen, führe ich diese Aufgabe auf die Kenntnis einer neuen Funktion dreier Veränderlicher, des allgemeinen Grundpotentials, zurück.

Mit Hilfe der Lauediagramme ist es uns zwar möglich, die Lage der Bausteine eines Kristalls anzugeben, jedoch herrscht über die Kräfte, die diesen Bau halten, noch keine völlige Klarheit.

Während die bisher genannten Arbeiten nur eine Coulombsche Kraftfunktion berücksichtigen, beschränkten sich jene Forscher, die ein andres Kraftgesetz zuließen, zumeist auf Untersuchung des Einflusses benachbarter Bausteine aufeinander. Bei dem von mir eingeschlagenen Weg erfordert es keine Mehrarbeit, wenn ich die Überlegungen für ein allgemeineres Kraftgesetz anstelle. Als Grundpotential treten hier Funktionen auf, die Herr Epstein[1]) als Verallgemeinerung der Riemannschen Zetafunktion untersucht hat. Auf diese soll in der vorliegenden Arbeit, die meiner Dissertation[2]) entnommen ist, die Energie einer auf Zentralkräften beruhenden gitterförmigen periodischen Ladungsverteilung zurückgeführt werden. In einem II. Teil sollen die Werte des Bornschen Grundpotentials, das als Sonderfall in den folgenden Betrachtungen enthalten ist, mitgeteilt und angewandt werden.

§ 1. Darstellung der Aufbauarbeit eines Kristalls durch Zetafunktionen.

1. Es seien für $j = 1, 2, 3$ $\mathfrak{a}_j$ drei linear unabhängige Vektoren[3]), n_j natürliche Zahlen. Drei Kanten eines Parallelflachs seien durch die Vektoren $n_j \mathfrak{a}_j$ gegeben. In seinen Gitterpunkten

$$\mathfrak{f} = k_1 \mathfrak{a}_1 + k_2 \mathfrak{a}_2 + k_3 \mathfrak{a}_3,$$
$$1 \leq k_j \leq n_j, \quad k_j \text{ ganz}$$

1) E. Madelung, „Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen", Diese Zeitschr. 19, 524—532, 1918.

2) Das Wort „**Potential**" ersetze ich wegen seiner vielseitigen Bedeutung, wo Mißverständnisse nicht ausgeschlossen sind, je nach dem Sinn durch „Aufbauarbeit", „Kraftfunktion" usw.

3) P. P. Ewald, „Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale", Ann. d. Phys. IV. **64**, 253—287, 1921.

4) M. Born, „Über elektrostatische Gitterpotentiale", Zeitschr. f. Phys. **7**, 124—140, 1921 = Hilbertfestschrift S. 534—550, Berlin 1921. Im folgenden „G. P."

1) P. Epstein, „Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen", Math. Annalen **56**, S. 615—644, 1903 (in der Folge mit E I bezeichnet), kurze Zusammenstellung der dort bewiesenen Eigenschaften auch: P. Epstein, „Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen II", Math. Annalen **63**, 205—216, 1906 (im folgenden E II). Bezeichnungsweise wie in E I (in E II ist s durch $\beta + \varepsilon$ ersetzt worden).

2) O. Emersleben, „Gitterpotentiale und Zetafunktionen", Diss. Göttingen 1922.

3) Bezeichnungsweise wie bei C. Runge, Vektoranalysis I (Leipzig 1919).

mögen sich „Ladungen" $\varepsilon_{\mathfrak{k}} = \varepsilon_{k_1 k_2 k_3}$ befinden, reelle Zahlen, die z. T. verschwinden können. (Wenn alle $\varepsilon_{\mathfrak{k}} = 0$, verlieren die hier auftretenden Fragen jedoch ihren Sinn.)

Ich nenne

$$E = \sum_{\mathfrak{k}} \varepsilon_{\mathfrak{k}} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_3=1}^{n_3} \varepsilon_{k_1 k_2 k_3} \tag{1}$$

die **Gesamtladung** des Parallelflachs. Zwei Punkte heißen gleichberechtigt, wenn der von einem zum andern führende Vektor sich ganzzahlig aus den drei **Grundvektoren** $n_j \mathfrak{a}_j$ zusammensetzen läßt.

Den ganzen dreifach ausgedehnten euklidischen Raum, so periodisch mit Ladungen besetzt, daß gleichberechtigte Punkte gleich geladen sind, nenne ich einen „**idealen Kristall**".

Er heiße **neutral**, wenn $E = 0$.

Die Ladungen, die höchstens in den Gitterpunkten

$$\mathfrak{k} = \sum_{j=1}^{3} k_j \mathfrak{a}_j$$

(k_j ganz, sonst beliebig) von Null verschieden sind, erfüllen die Periodizitätsbedingungen

$$\varepsilon_{k_1 k_2 k_3} = \varepsilon_{k_1 + n_1,\, k_2,\, k_3} \text{ usw.} \tag{1a}$$

Es sei $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ gerade (man verdoppele dazu nötigenfalls die Ausdehnung des **Grundflachs** in einer Richtung!). Die Reihenfolge der Bezeichnung der Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_j$ sei so gewählt, daß der Rauminhalt

$$D = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 > 0$$

ist.

Die Kräfte, die die Ladungen zweier Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aufeinander ausüben, mögen nur von der Entfernung abhängen und eine Kraftfunktion

$$\frac{\varepsilon_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{q}}}{[(\mathfrak{p}-\mathfrak{q})\cdot(\mathfrak{p}-\mathfrak{q})]^{\frac{s}{2}}} \tag{2}$$

besitzen.

Für $s = 1$ bedeutet dies das Coulombsche Kraftgesetz (Newtonsche Potential). Wir wollen uns jedoch hierauf nicht beschränken, ja werden es sogar vorübergehend ausschließen. Zur Vermeidung von Konvergenzschwierigkeiten sei zunächst $s > 3$.

Um die Ladung $\varepsilon_{\mathfrak{p}}$ an den jetzt von ihr besetzten Punkt $\mathfrak{p}$ zu bringen, war die Arbeit

$$\varepsilon_{\mathfrak{p}} \psi_{\mathfrak{p}} = \varepsilon_{\mathfrak{p}} \cdot \sum_{\mathfrak{k}}{}' \frac{\varepsilon_{\mathfrak{k}}}{[(\mathfrak{k}-\mathfrak{p})\cdot(\mathfrak{k}-\mathfrak{p})]^{\frac{s}{2}}}$$

zu leisten.

Wenn nichts anderes bemerkt, soll $\mathfrak{k}$ als Summenzeiger alle Gitterpunkte eines unendlichen Gitters, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nur die Punkte eines Grundflachs durchlaufen. Über den Punkt $\mathfrak{p}$ ist die Summation des $\mathfrak{k}$ jedoch nicht zu erstrecken, wie der Strich am Summenzeichen andeutet, da dort vorher keine Ladung war. Wegen (1a) ist:

$$\varepsilon_{\mathfrak{p}} \psi_{\mathfrak{p}} = \varepsilon_{\mathfrak{p}} \cdot \sum_{\mathfrak{k}}{}' \frac{\varepsilon_{\mathfrak{k}+\mathfrak{p}}}{(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k})^{\frac{s}{2}}}.$$

Diese Reihe konvergiert, wie sich später ergeben wird, für $s > 3$.

2. Die Aufbauarbeit für das ganze Gitter ist unendlich. Auf das Grundflach entfällt die Energie

$$\Psi = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}} \psi_{\mathfrak{p}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{k}}{}' \frac{s_{\mathfrak{k}}}{(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k})^{\frac{s}{2}}}, \tag{3*}$$

wo

$$s_{\mathfrak{k}} = \sum_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}+\mathfrak{k}}. \tag{3**}$$

Die Aufbauarbeit des Grundflachs ist also gleich dem Wert, den die Kraftfunktion einer neuen Ladungsverteilung $\frac{1}{2} s_{\mathfrak{k}}$ im Nullpunkt des Gitters hat. Diese neue Verteilung hat dieselbe Periode wie die frühere. Es sei

$$\mathfrak{n} = \sum_{j=1}^{3} g_j n_j \mathfrak{a}_j,$$

wo g_j ganzzahlig, ein Vektor, der gleichberechtigte Punkte verbindet. Dann ist nach (1a):

$$s_{\mathfrak{k}+\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}+\mathfrak{k}+\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}+\mathfrak{k}} = s_{\mathfrak{k}}, \quad \text{w. z. b.} \tag{4a}$$

Diese Ladungsverteilung ist außerdem gerade:

$$s_{\mathfrak{k}} = s_{-\mathfrak{k}}; \tag{4b}$$

denn

$$s_{\mathfrak{k}} = \sum_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}+\mathfrak{k}} = \sum_{\mathfrak{p}+\mathfrak{k}} \varepsilon_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{p}+\mathfrak{k}},$$

weil es wegen der Periodizität gleichgültig ist, ob $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \mathfrak{k}$ bei festem $\mathfrak{k}$ alle Punkte des Grundflachs durchläuft

$$= \sum_{\mathfrak{q}} \varepsilon_{\mathfrak{q}-\mathfrak{k}} \varepsilon_{\mathfrak{q}} = s_{-\mathfrak{k}}.$$

3. Wenn $s_{\mathfrak{q}}$ beliebige Größen sind, die den Bedingungen (4a, b) genügen, lassen sie sich immer eindeutig als trigonometrische Summen der Form

$$s_{\mathfrak{q}} = \sum \tilde{s}_{\mathfrak{p}} \cos 2\pi \left(\frac{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}}{n} \right) \tag{4}$$

darstellen, deren Koeffizienten der Bedingung

$$\tilde{s}_{\mathfrak{p}} = \tilde{s}_{-\mathfrak{p}} \tag{4b}$$

genügen. Da sie vorläufig nur für Gitterpunkte im Grundflach vorkommen, können sie darüber hinaus durch

$$\tilde{s}_{\mathfrak{p}+\mathfrak{n}} = \tilde{s}_{\mathfrak{p}} \tag{4a}$$

erklärt werden. Dabei bedeute

$$\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}}{n}\right)=\sum_{j=1}^{3}\frac{p_j q_j}{n}.$$

Zum **Beweis:** Falls es Zahlen ξ mit den in (4) genannten Eigenschaften gibt, müssen sie die Gestalt

$$\xi_{\mathfrak{t}}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{\mathfrak{p}}' s_{\mathfrak{p}}\cos 2\pi\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{t}}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{N}\cdot\sum_{\mathfrak{p}}' s_{\mathfrak{p}} e^{2\pi i\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{t}}{n}\right)} \qquad (5)$$

haben (vgl. G. P. S. 132). Daß diese ξ die Darstellung wirklich leisten, folgt aus der Symmetrie zwischen s und ξ.

Wenn $s_{\mathfrak{p}}$ wieder die neuen Ladungsverteilungen aus (3) bedeuten, ergeben sich als Summe von höchstens N Gliedern daraus die „Koordinaten" $\xi_{\mathfrak{t}}$.

4. Durch Einsetzen von (4) in (3*) ergibt sich die Aufbauarbeit:

$$\mathfrak{W}=\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{t}}'\frac{1}{(\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{t})^{\frac{s}{2}}}\sum_{\mathfrak{p}}'\xi_{\mathfrak{p}}\cos 2\pi\left(\frac{\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{p}}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}}'\xi_{\mathfrak{p}}\sum_{\mathfrak{t}}'\frac{\cos 2\pi\left(\frac{\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{p}}{n}\right)}{(\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{t})^{\frac{s}{2}}} \qquad (6)$$

mit den Koordinaten $\xi_{\mathfrak{p}}$ als endliche Summe aus den Werten einer dreifachen Reihe

$$Z\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ p_1 & p_2 & p_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{vmatrix}(s)=\sum_{\mathfrak{t}}'\frac{\cos 2\pi\left(\frac{\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{p}}{n}\right)}{(\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{t})^{\frac{s}{2}}}, \qquad (6a)$$

d. i. eine Epsteinsche Zetafunktion dritter Ordnung mit verschwindenden oberen und rationalen untern Freiwerten. In § 2 werde ich auf diese Funktionen zurückkommen. Bei gegebenem Gitter und bekanntem Exponent s der Kraftfunktion genügt es, sie in höchstens N verschiedenen Punkten zu kennen, um daraus additiv die Aufbauarbeit des Periodenflachs zu berechnen.

5. Immerhin wächst die Anzahl N der bei gegebener Ladungsverteilung zu berechnenden und ungünstigstenfalls voneinander verschiedenen $s_{\mathfrak{t}}$ und $\xi_{\mathfrak{t}}$ je — bei ähnlichen Grundflachen — mit der dritten Potenz der in Richtung einer einzelnen Kante vorhandenen Gitterpunktzahl. Eine beträchtliche Vereinfachung — Verminderung der Höchstzahl der Schritte von N^2 auf N — ergibt sich, wenn ich die Koordinaten unmittelbar durch die Ladungen darstelle.

Nach (5) und (3**) ist:

$$N\xi_{\mathfrak{t}}=\sum_{\mathfrak{p}} e^{2\pi i\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{t}}{n}\right)}\cdot\sum_{\mathfrak{q}}\varepsilon_{\mathfrak{q}}\varepsilon_{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}}$$
$$=\sum_{\mathfrak{q}}\varepsilon_{\mathfrak{q}}\sum_{\mathfrak{p}} e^{2\pi i\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{t}}{n}\right)}\cdot\varepsilon_{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}}$$

wegen der Periodizität

$$=\sum_{\mathfrak{q}}\varepsilon_{\mathfrak{q}}\sum_{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}} e^{2\pi i\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{t}}{n}\right)}\cdot\varepsilon_{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}}$$
$$=\sum_{\mathfrak{q}}\varepsilon_{\mathfrak{q}} e^{-2\pi i\left(\frac{\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{t}}{n}\right)}\cdot\sum_{\mathfrak{q}}\varepsilon_{\mathfrak{q}} e^{2\pi i\left(\frac{\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{t}}{n}\right)}$$
$$=A^2+B^2, \qquad (7)$$

wenn man

$$\sum_{\mathfrak{q}}\varepsilon_{\mathfrak{q}} e^{2\pi i\left(\frac{\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{t}}{n}\right)}=A\left(\frac{\mathfrak{t}}{n}\right)+i\cdot B\left(\frac{\mathfrak{t}}{n}\right) \qquad (7a)$$

setzt. Hieraus erkennt man — was aus den früheren Darstellungen noch nicht ersichtlich war — daß stets $\xi_{\mathfrak{t}}>0$.

§ 2. Erklärung der Epsteinschen Zetafunktionen, Regularität in s.

1. Es sei

$$\varphi((x))=\sum_{\varkappa=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{p} a_{\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda \qquad (a_{\varkappa\lambda}=a_{\lambda\varkappa}) \qquad (11)$$

eine positiv-definite quadratische Form von p reellen Veränderlichen x_j, $j=1,2,\ldots p$, mit den reellen Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$. Ihre Determinante ist

$$D=|a_{\varkappa\lambda}|>0. \qquad (12)$$

Es bedeute $\varphi((x))^{\frac{s}{2}}=e^{\frac{s}{2}\lg\varphi}$, wo $\lg\varphi$ reell. Die $2p$ Zahlen g_j, h_j, $j=1\ldots p$ seien reell. $h=h_0$ bedeute, daß $h_1=h_2=\ldots=h_p=h_0$. Ich setze $s=\sigma+\tau i$, σ und τ reell, und schreibe zur Abkürzung die Bilinearform

$$\sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda h_\lambda=(k\,h).$$

In der folgenden p-fach unendlichen Reihe sollen die k_j $(j=1,\ldots p)$ unabhängig voneinander alle ganzzahligen Werte annehmen, ausgenommen — dies deutet der eingeklammerte Strich an — falls alle g ganzzahlig die eine Zusammenstellung, bei der der Nenner verschwinden würde. Unter diesen Festsetzungen konvergiert für genügend große σ absolut:

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{k_p=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i(k\,h)}}{\varphi((k+g))^{\frac{s}{2}}}=Z\begin{vmatrix}g_1\ldots g_p\\ h_1\ldots h_p\end{vmatrix}(s)_\varphi. \qquad (13)$$

Nach wachsendem Nenner geordnet ist dies eine Dirichletsche Reihe. Die hierdurch bestimmte analytische Funktion in s nenne ich Epsteinsche Zetafunktion $p$ter Ordnung in

der Veränderlichen s mit den „oberen" Freiwerten[1]) g_j und den „unteren" Freiwerten h_j. Wo Mißverständnisse ausgeschlossen erscheinen, schreibe ich kurz $^{(p)}Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)$.

2. Auf eine derartige Funktion dritter Ordnung wurden wir in (6a) geführt; denn für $g = 0$ heben sich die Imaginärteile für k und $-k$ gegenseitig fort, das Entfernungsquadrat

$$\mathfrak{k}^2 = k_1^2 a_1 \cdot a_1 + k_2^2 a_2 \cdot a_2 + k_3^2 a_3 \cdot a_3 + 2 k_1 k_2 a_1 \cdot a_2 + 2 k_2 k_3 a_2 \cdot a_3 + 2 k_3 k_1 a_3 \cdot a_1$$

ist eine positiv-definite quadratische Form $\varphi((k))$ der in (11) betrachteten Art mit den Moduln $a_{\varkappa\lambda} = a_\varkappa \cdot a_\lambda$. Die physikalische Bedeutung von $^{(3)}Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi$ besteht darin, daß ihr Realteil bei der Kraftfunktion r^{-s} für den Aufpunkt g das Potential der Ladungsverteilung $\cos 2\pi(kh)$ in den Gitterpunkten des durch φ bestimmten Gitters ist. Entsprechende Bedeutung haben die Funktionen zweiter bzw. erster Ordnung für eine ebene bzw. geradlinge Ladungsverteilung, wenn der Aufpunkt der Ebene bzw. Geraden angehört.

Es sei

$$\delta_{\varkappa\varkappa} = 1, \quad \delta_{\varkappa\lambda} = 0 \text{ für } \varkappa \neq \lambda.$$

Wenn von dem Fall $a_{\varkappa\lambda} = \delta_{\varkappa\lambda}$ ($D = 1$) die Rede ist, soll das φ in der Bezeichnung der Zetafunktion durch den Buchstaben δ ersetzt werden. Der hier auftretenden reinen Quadratsumme entspricht das würfelförmige Gitter. Für $p = 1$ sei stets $a_{11} = 1$.

Bei gegebenem Gitter sind die Einheitsvektoren a_j natürlich nicht eindeutig bestimmt.

3. Um die Zetafunktionen in Integralform darzustellen, gehe ich von dem für $\sigma > 0$ und $u > 0$ bestehenden Eulerschen Integral

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{u^{\frac{s}{2}}} = \int_0^\infty z^{\frac{s}{2}-1} e^{-uz} dz \tag{14}$$

aus. Ich ersetze hierin u durch $\pi\varphi((k+g))$, multipliziere mit $e^{2\pi i(kh)}$ und summiere nach wachsendem Nenner über alle Gitterpunkte (einen u. U. ausgenommen):

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) {}^{(p)}Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=-\infty}^{\infty}{}' e^{2\pi i(kh)} \int_0^\infty z^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi z \varphi((k+g))} dz$$

$$= \int_0^\infty z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=-\infty}^{\infty}{}' e^{-\pi z \varphi((k+g)) + 2\pi i(kh)} dz \tag{15}$$

Ich beschränke mich zunächst auf die Halbebene absoluter und gleichmäßiger Konvergenz $\sigma > 2p + 3$, in der die Reihe einen Sinn hat und die Vertauschung von Summation und Integration zulässig ist. Für die Funktionen

$${}^{(p)}\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(z)_\varphi = \vartheta\left|\begin{matrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{matrix}\right|(z)_\varphi$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} e^{-\pi z \varphi((k+g)) + 2\pi i(kh)} \tag{16}$$

ergibt Anwendung der reziproken Transformation:

$${}^{(p)}\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(z)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i(gh)}}{z^{\frac{p}{2}}\sqrt{D}} \cdot {}^{(p)}\vartheta\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|\left(\frac{1}{z}\right)_\varphi. \tag{17}$$

Dabei bedeutet

$$\varphi((x)) = \sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=1}^{p} \bar{a}_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

die zu φ reziproke Form; $\sqrt{D} > 0$. Es ist auch $\bar{a}_{\varkappa\lambda} = \bar{a}_{\lambda\varkappa}$.

Es sei $\omega > 0$. Dann trenne ich das Integral (15) an der Stelle ω und führe in dem Intervall $0 \ldots \omega$ die reziproke ϑ-Transformation durch:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) {}^{(p)}Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi$$

$$= \frac{e^{-2\pi i(gh)}}{\sqrt{D}} \int_0^\omega z^{\frac{s-p}{2}-1} {}^{(p)}\vartheta\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|\left(\frac{1}{z}\right)_\varphi dz$$

$$- \frac{2\, e^{-2\pi i(gh)}}{s} \omega^{\frac{s}{2}}$$

$$+ \int_\omega^\infty z^{\frac{s}{2}-1} \left({}^{(p)}\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(z)_\varphi - e^{-2\pi i(gh)}\right) dz. \tag{18}$$

Hierbei bedeutet der Strich über dem Minuszeichen, daß das dahinterstehende Glied nur in dem Fall, daß **alle g ganzzahlig** sind, zu subtrahieren ist. Im ersten Teil des Integrals wurde die Integration dieses Gliedes vor der Transformation durchgeführt. Zwei Striche " deuten an, daß die darunter stehende Rechenvorschrift nur auszuführen ist, falls **alle h ganzzahlig**. Bei dem in diesem Fall von z freien Exponentialglied wird die Integration durchgeführt, im übrigen im Integrant z durch $\frac{1}{z}$ ersetzt. Dann ergibt sich:

[1]) „Freiwert" soll auf die Veränderlichkeit von g und h hinweisen, zugleich die wesentliche Verschiedenheit von s betonen.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(p)Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(s)_q$$

$$= \frac{e^{-2\pi i(gh)}}{\sqrt{D}}\int_{\frac{1}{\omega}}^{\infty} z^{\frac{p-s}{2}-1}\left((p)\vartheta\left|\begin{matrix}h\\-g\end{matrix}\right|(z)_q - e^{2\pi i(gh)}\right)dz + \frac{2}{(s-p)\sqrt{D}}\omega^{\frac{s-p}{2}}$$

$$+\int_{\omega}^{\infty} z^{\frac{s}{2}-1}\left((p)\vartheta\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(z)_q - e^{-2\pi i(gh)}\right)dz - \frac{2}{s}e^{-2\pi i(gh)}\omega^{\frac{s}{2}}. \qquad (19)$$

Diese Formel enthält als Sonderfälle zwei bereits bekannte Integraldarstellungen:

Für $\omega = 1$ hat man hierin eine Zusammenfassung von vier bei Herrn Epstein[1]) auftretenden Formeln; für $p = 3$, $s = 1$ aber willkürliches $\omega > 0$ tritt sie in ähnlicher Gestalt bei Herrn Ewald[2]) auf. Die Einführung des ω empfiehlt sich für die zahlenmäßige Berechnung, um den Anteil beider Integrale an der Summe in weiten Grenzen beeinflussen zu können.

4. Es hatte bisher genügt zu wissen, daß die Reihendarstellung der Zetafunktion für alle s mit großem Realteil gilt. Da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ für $\sigma > 0$ regulär, ist die linke Seite von (19) eine analytische Funktion von s für $\sigma > 2p + 3$. Die beiden Integrale auf der rechten Seite sind ganze transzendente Funktionen von s[3]), die rechte Seite ist daher meromorph in s mit höchstens den beiden Polen $s = 0$ und $s = p$ (die nämlich genau dann auftreten, wenn alle g bzw. alle h ganz sind) und den Residuen

$$-2e^{-2\pi i(gh)} \quad \text{und} \quad \frac{2}{\sqrt{D}}.$$

Also gilt nach dem Satz von der analytischen Fortsetzung dasselbe für die linke Seite.

Wenn alle g ganzzahlig, hat die rechte Seite in $s = 0$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-2e^{-2\pi i(gh)}$. Da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ für $s = 0$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 2 hat, ist in diesem Fall

$$Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(0) = -e^{-2\pi i(gh)}, \qquad (19a)$$

insbesondere

$$Z\left|\begin{matrix}0\\h\end{matrix}\right|(0) = -1.$$

Sonst ist die rechte Seite im Nullpunkt regulär, also wegen des Pols der Gammafunktion

$$Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(0) = 0. \qquad (19b)$$

Da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ stets $\neq 0$ und für $s = p > 0$ regulär, ist $Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(s)$ eine ganze transzendente Funktion von s, solange h kein Gitterpunkt (d. h. nicht alle p Freiwerte h_i ganzzahlig sind). Wenn jedoch alle h_i ganz, ist sie meromorph mit dem einen Pol $s = p$ und dem Residuum $\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$. — Für alle Zetafunktionen gilt der Satz[1]):

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(p)Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(s)_q$$

$$= \frac{e^{-2\pi i(gh)}}{\sqrt{D}}\pi^{\frac{p-s}{2}}\Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right)(p)Z\left|\begin{matrix}h\\-g\end{matrix}\right|(p-s)_{\frac{1}{q}} \qquad (20)$$

von dessen Richtigkeit man sich aus (19) mit $\omega = 1$ in den vier Fällen (je nachdem h und g Gitterpunkte sind oder nicht) leicht überzeugt.

5. Um jetzt zu zeigen, daß die $Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(s)$ darstellenden Dirichletschen Reihen für $\sigma > p$ absolut konvergieren, brauche ich nur zu beweisen, daß ihre Majorante $Z\left|\begin{matrix}g\\0\end{matrix}\right|(s)$ für $\sigma > p$ konvergiert. Da bei jeder irgendwo konvergenten Dirichletschen Reihe mit nur positiven Koeffizienten auf der Konvergenzgeraden ein singulärer Punkt liegt[2]) und $Z\left|\begin{matrix}g\\0\end{matrix}\right|(s)$ nur den einen Pol $s = p$ hat, muß $\sigma = p$ absolute Konvergenzabszisse sein.

Die bisherigen Untersuchungen betrafen die

1) E I S. 625, 626. E II S. 207.
2) P. P. Ewald, a. a. O. S. 269.
3) E I S. 625.

1) „Fundamentalsatz". E II S. 207.
2) E. Landau, „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", Leipzig 1909, S. 880. — Durch Verwendung dieses allgemeinen Satzes gelingt der Beweis der absoluten Konvergenz leichter als durch Zurückgehen auf Sondereigenschaften dieser Funktionen.

Zetafunktionen als analytische Funktionen von s bei festem g und h. Die physikalischen Fragestellungen bringen es mit sich, auch das Verhalten der Funktionen in Abhängigkeit von den g und h zu untersuchen.

Zunächst soll nach der Stetigkeit gefragt werden.

§ 3. Unstetigkeit in h und g.

Daß bei festem s die Zetafunktionen in den unteren und oberen Freiwerten stetig sind, solange nicht alle g_j oder alle h_j ganzzahlig sind, ist ohne weiteres klar.

h. Es seien s und alle g fest.

1. Im Gebiet der absoluten Konvergenz der Reihe (13), d. h. für $\sigma > p$,

$$e^{2\pi i (g\,h)} \sqrt{D} : \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \left[{}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| (s)_q - {}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} g \\ o \end{matrix} \right| (s)_q \right]$$

$$= V_1 + \int_{\frac{1}{\omega}}^{\infty} z^{\frac{p-s}{2}-1} e^{-\pi z \overline{q}((h))} dz - \frac{2 e^{2\pi i (g\,h)}}{s-p} \omega^{\frac{s-p}{2}}$$

$$= V_1 - \frac{\Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right)}{\left(\pi \overline{q}((h))\right)^{\frac{p-s}{2}}} - \frac{1}{\left(\pi \overline{q}((h))\right)^{\frac{p-s}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}\overline{q}} y^{\frac{p-s}{2}-1} e^{-y} dy - \frac{2 e^{2\pi i (g\,h)}}{s-p} \omega^{\frac{s-p}{2}},$$

wegen $\sigma \leq p$, $s \neq p$:

$$= V_1 - \Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right) \left(\pi \overline{q}((h))\right)^{\frac{s-p}{2}} - \left(\pi \overline{q}((h))\right)^{\frac{s-p}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}\overline{q}} y^{\frac{p-s}{2}-1} dy + V_2 - \frac{2 e^{2\pi i (g\,h)}}{s-p} \omega^{\frac{s-p}{2}}$$

$$= V_3 - \Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right) \cdot \left(\pi \overline{q}((h))\right)^{\frac{s-p}{2}}.$$

Die Gammafunktionen auf der rechten und linken Seite haben unter den gemachten Voraussetzungen einen endlichen von Null verschiedenen Wert. Wenn alle h gegen Null streben, erhalte ich die **Grenzformel**:

$$\lim_{\overline{q}((h)) \to 0} \left\{ {}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| (s)_q - \frac{\pi^{\frac{s-p}{2}}}{\sqrt{D}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \overline{q}((h))^{\frac{s-p}{2}} \right\} = {}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} g \\ o \end{matrix} \right| (s)_q . \qquad (21\,a)$$

5. Für $s = p$ ist nach (19):

$$\pi^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) {}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| (p)_q + \frac{1}{\sqrt{D}} \lg \overline{q}((h))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \int_{\frac{1}{\omega}}^{\infty} \left(\vartheta \left| \begin{matrix} -g \\ o \end{matrix} \right| (z)_{\frac{1}{q}} - e^{\pm \pi z \overline{q}((h))} \right) \frac{dz}{z} + \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \int_{\frac{1}{\omega}}^{\infty} \frac{e^{-\pi z \overline{q}((h))}}{z} dz + V_4$$

$$+ \int_{\frac{1}{\omega}}^{\infty} z^{\frac{p}{2}-1} \left({}^{(p)}\vartheta \left| \begin{matrix} g \\ o \end{matrix} \right| (z)_q - e^{-2\pi i (g\,\omega)} \right) dz - \frac{2}{p} \omega^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \lg \overline{q}((h))$$

2. wegen (19a, b) für $s = o$,

3. wegen (19c) ${}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| (-2n) = o$, wenn n eine natürliche Zahl ist[1]), für $s = -2n$ bleibt die Funktion stetig, auch wenn h ein Gitterpunkt ist.

4. Es sei $\sigma \leq p$, $s \neq p$, o, -2, -4, ... Wegen der Periodizität in h genügt Untersuchung der Stetigkeit in $h = o$. Wenn $V_1, \ldots, V_4$ in $-\frac{1}{2} \leq h_j \leq \frac{1}{2}$ stetige für $h = o$ verschwindende Funktionen von h bedeuten, erhält man aus (19) durch Zusammenfassung der einander entsprechenden Glieder für $o < \sum_{j=1}^{p} h_j^2 \leq \frac{1}{4}$:

1) E I S. 627. E II S. 207, 208.

$$\to \frac{1}{\sqrt{D}} \int_{\frac{1}{\omega}}^{x} \left(\vartheta \left| \begin{matrix} o \\ -g \end{matrix} \right| (z)_{\varphi} - 1 \right) \frac{dz}{z} - \frac{1}{\sqrt{D}} \left(C + \lg \frac{\pi}{\omega} \right) + \int_{\omega}^{x} z^{\frac{p}{2}-1} \left(\vartheta \left| \begin{matrix} g \\ o \end{matrix} \right| (z)_{\varphi} - 1 \right) dz - \frac{2}{p} \omega^{\frac{p}{2}},$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet. Somit erhält man:

$$\lim_{\varphi((h))\to 0} \left\{ \pi^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{D}\, {}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| (p)_{\varphi} + \lg \varphi((h)) \right\} = \int_{\frac{1}{\omega}}^{x} \sum_{k_j=-x}^{x}{}' e^{-\pi z \varphi((hk))} - 2\pi i (gk) \frac{dz}{z} - C - \lg \pi$$

$$+ \sqrt{D} \int_{\omega}^{x} z^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k_j=-x}^{x}{}' e^{-\pi z \varphi((k+g))}\, dz + \frac{2\sqrt{D}\,\omega^{\frac{p}{2}}}{p} + \lg \omega \qquad (21\,b)$$

als Gegenstück zur Kroneckerschen Grenzformel und ihren Erweiterungen durch Herrn Epstein[1]). Während dort bei festem g und h der Grenzwert für $s \to p$ festgestellt wird, ergibt sich hier bei festem g und $s = p$ der Grenzwert für $h \to o$. Die Grenzformeln (21) sind zur Interpolation geeignet.

g. Um die Stetigkeit in g zu untersuchen, falls diese Freiwerte gegen einen Gitterpunkt streben — bei festem s und h — genügt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit wieder eine Umgebung von $g = o$ zu betrachten, die keinen weitern Gitterpunkt enthält. Ich behaupte die Richtigkeit von

$$\lim_{\varphi((g))\to 0} \left({}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| (s)_{\varphi} - \varphi((g))^{-\frac{s}{2}} \right) = {}^{(p)}Z \left| \begin{matrix} o \\ h \end{matrix} \right| (s)_{\varphi}. \qquad (22)$$

da $\frac{1}{\sqrt{D}}$ die Determinante der reziproken Form ist. Hieraus folgt (22) durch Anwendung von (20) wegen $\sqrt{D} \neq o$.

§ 4. Neutrale Gitter.

1. Die Ergebnisse der letzten beiden Paragraphen gestatten eine bequeme Berechnung der Aufbauarbeit. Sie ermöglichen auch, im Fall eines neutralen Gitters die Beschränkung $s > 3$ des § 1 aufzuheben. (Die Konvergenz der dort auftretenden Reihen für $s > 3$ folgt daraus, daß sie endliche Summen der für $\sigma > 3$ absolut konvergenten Zetareihen sind.) Aus $E = \sum_{q} \varepsilon_q = o$ folgt

$$\sum_{p} s_p = \sum_{p} \varepsilon_p \sum_{q} \varepsilon_{p+q} = o$$

also:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{p} s_p = o;$$

daher tritt in diesem Fall der Wert ${}^{(3)}Z \left| \begin{matrix} o \\ o \end{matrix} \right| (s)$ nicht auf. Für $p \neq o$ ist aber die Zetafunktion eine ganze transzendente Funktion in s, die — gegeben durch (19) — auch über die absolute Konvergenzgerade hinaus die Funktion liefert, deren wir zur Berechnung der Aufbauarbeit für $s \leqq 3$ bedürfen.

Hätten wir von vornherein mit irgendeinem

1. Im Gebiet der absoluten Konvergenz von (13) folgt dies daraus, daß in der Reihe für $g = o$ das Glied $k = o$ auszulassen ist.

2. Die Behauptung für $s = o$:

$$\lim_{\varphi((g))\to 0} \left(Z \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| (s)_{\varphi} - 1 \right) = Z \left| \begin{matrix} o \\ h \end{matrix} \right| (s)_{\varphi},$$

solange g kein Gitterpunkt, ist in (19a, b) enthalten.

3. Die Behauptung für $\sigma < o$: „$Z \left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right| (s)$ stetig in g" folgt für negative gerade s aus (19c), sonst aus der Funktionalgleichung (20), da die Stetigkeit der rechts stehenden

$$Z \left| \begin{matrix} h \\ -g \end{matrix} \right| (p - s)$$

in den unteren Freiwerten vorhin gezeigt wurde.

4. Für $\sigma > o$, $s \neq o$ folgt aus (21a):

$$\lim_{\varphi((-g))\to 0} \left\{ \pi^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right) Z \left| \begin{matrix} h \\ -g \end{matrix} \right| (p-s)_{\varphi} - \sqrt{D}\, \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \varphi((-g))^{-\frac{s}{2}} \right\}$$

$$= \pi^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right) Z \left| \begin{matrix} h \\ o \end{matrix} \right| (p-s)_{\varphi},$$

1) E I S. 628—644.

festen Wert $s \leq 3$ — z. B. $s = 1$ — gerechnet, so wären wir auf bedingt konvergente Reihen gestoßen, deren Wert bekanntlich von der Reihenfolge der Summation abhängt. Die Wahl der Reihenfolge muß natürlich durch physikalische Überlegungen begründet werden. **Wachsende Entfernung** scheint zunächst ein beachtenswerter Gesichtspunkt zu sein, doch liefert er eine divergente Reihe, z. B. für $^{(2)}Z \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} (1)_0$[1]). Eine mitunter benutzte unendliche Folge konvergenzerzeugender Faktoren, die man an geeigneter Stelle wieder gliedweise gegen 1 streben läßt, verschleiert nur die Schwierigkeit. Es müßte auch die Stetigkeit bei gliedweisem Grenzübergang gezeigt werden, da man ja durch ungeeignete Umordnung der absolut konvergent gemachten Reihe jeden beliebigen Wert geben kann, wenn man zum Schluß gliedweise zur Grenze übergeht.

Auf der Suche nach einem andern Weg beachte man, daß wir es in Wirklichkeit nicht mit einem idealen Kristall zu tun haben, dessen Ladungen stets genau in den Gitterpunkten liegen. Wir wollen annehmen, daß sie sich um diese Punkte bewegen. Übrigens müssen wir ihnen auch eine endliche Ausdehnung zuschreiben. Die Divergenz der oben betrachteten Reihe bei Anordnung nach wachsendem Nenner hat ihren Grund darin, daß die Anzahl der Gitterpunkte auf einer Kugel um den Anfang in gleichem Maße wie der Radius wächst[1]).

Daß bei den wirklichen **endlichen** Gittern Konvergenzschwierigkeiten nicht auftreten, darf uns nicht veranlassen, hier über diese hinwegzugehen, denn eine divergente Reihe zur Bestimmung der Aufbauarbeit könnte unmöglich einen Ersatz für die endliche Summe bilden, die beim wirklichen Kristall auftritt. Aber selbst wenn wir das Gitter als unendlich ausgedehnt annehmen, ist die Divergenz nur durch zu große Regelmäßigkeit der Ladungsverteilung eines solchen „idealen" Kristalls hervorgerufen, die dem wirklichen Kristall fremd ist.

Da die Bewegungen der Ladungen als ungeordnet angesehen werden können, brauchen wir Konvergenz nicht zu fordern, wenn nur für längere Zeit ein **Mittelwert** bei zunehmender Entfernung vorhanden ist, d. h. wenn die Reihe summierbar ist. Nach einem Satz über Dirichletsche Reihen ist dies der Fall[2]). Die mühsame Bildung der arithmetischen Mittel braucht nicht durchgeführt zu werden, da die analytische Fortsetzung der für $\sigma > 3$ durch die Reihe erklärten Funktion auf denselben Wert führt, wir für diese in der Integraldarstellung aber einen durch die Willkür in der Wahl des ω sehr anpassungsfähigen Ausdruck besitzen. Die Übereinstimmung zwischen Summe und Fortsetzung besteht in allen Punkten, in denen nicht alle untern Freiwerte verschwinden, also insbesondere bei den Zetafunktionen, die bei neutralem Gitter auftreten.

2. Wir hatten bisher eine Kraftfunktion der Gestalt $\frac{\varepsilon_p \varepsilon_{p+\mathfrak{k}}}{(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k})^s}$ angenommen. Die Darstellung der Gitterenergie durch Zetafunktionen gestaltet sich ganz entsprechend, wenn die Kraftfunktion die Gestalt einer Summe

$$\sum_x \frac{\varepsilon_p^{(x)} \varepsilon_{p+\mathfrak{k}}^{(x)}}{(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k})^s}$$

hat, mögen die reellen s ganzzahlig sein oder nicht.

Magdeburg, im Dezember 1922.

(Eingegangen 22. Dezember 1922.)

1) Vgl. Teil I, § 3 meiner Dissertation, wo die bedingte Konvergenz der Reihen untersucht ist.

2) Folgt aus G. H. Hardy und M. Riesz, „The General Theory of Dirichlet's Series" (Cambridge 1915) S. 23 und Satz 41 S. 53 in Verbindung mit Teil I § 3, 7 meiner Dissertation.

Über das UV.

Von A. Piccard und E. Stahel.

In dieser Zeitschrift **23**, 1, 1922 haben wir über Versuche berichtet, die uns ein neues Radioelement vermuten ließen. O. Hahn hält dessen Existenz für unvereinbar mit eigenen Messungen. Wir möchten in folgendem zeigen, warum wir die Diskussion über diesen Körper nicht als abgeschlossen betrachten.

Es handelt sich um ein UV genanntes Radioelement, das eine etwas größere Halbwertszeit als UX_1 besitzt und das eine weiche Strahlung aussendet, die im Gleichgewichtszustand etwa 2 Proz. der UX-Strahlung ausmacht. Es entsteht aus Uran gleichzeitig mit UX und wird mit diesem als Fluorid ausgeschieden. In unserer ersten, vorläufigen Mitteilung haben wir die Halbwertszeit des UV zu 48 Tagen angegeben. Die Fortsetzung der Versuche, vor allem die genaue Bestimmung der Restaktivität, die erst ein paar Monate später möglich war, ergab eine Korrektur dieser Zahl. Heute halten wir eine Halbwertszeit von etwa 34 Tagen als die wahrscheinlichste.

Wir möchten nun zeigen, daß unter diesen Umständen die Versuche O. Hahns nichts Eindeutiges über dieses neue Element aussagen können. Es ergeben sich nämlich, wie aus

folgender Tabelle hervorgeht, für die Abfallskurven von reinem UX oder $UX + UV$ nur Differenzen, die die Meßgenauigkeit nicht überschreiten. (Bei Annahme der früher angegebenen Halbwertszeit von 48 Tagen würden die Hahnschen Messungen allerdings die Existenz des UV eindeutig widerlegen.)

Alter in Tagen	Meßergebnisse von O. Hahn	UX + Const. berechnet $C = 9{,}2$	$UX + UV$ + Const. berechnet $C = 9{,}1$ $UV = 2$ Proz. UX
18	1331	1331	1331
19	1296	1296	1297
29	959	979	980
34	846	850	851,5
44	625	643	645
120	81	83,2	85,1
173	26	24,8	26,4
190	19,2	19,5	20,2
228	13,0	12,8	12,9
248	11,3	11,2	11,2
262	10,5	10,5	10,5

Man sieht aus dieser Tabelle, daß die Abweichungen für die beiden Hypothesen von der gleichen Größenordnung sind, es also unmöglich ist, aus dieser Versuchsreihe das UV abzulehnen. Der Grund, warum in unseren eigenen Messungen deutlichere Differenzen auftraten, liegt darin, daß in unseren Präparaten die Restaktivität ca. 10mal kleiner war, was erlaubt, im kritischen Gebiet genauer zu messen.

Wir haben die Versuche an einem andern UX-Präparat wiederholt, das am 10. V. 1921 aus 50 kg Urannitrat dargestellt worden war und das vom 23. XII. 21 bis 1. VI. 22 gemessen wurde. Zu Beginn der Messung war also das UX bereits auf $^1/_{637}$, UV auf $^1/_{104}$ ($T = 34$ Tage) abgestorben; relativ zu UX war also UV etwa 6,4 fach angereichert.

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß das gemessene Präparat sicher langsamer abgenommen hat, als reinem $UX + C$ entsprochen hätte (Vergleich von Kolonne 3 und 4). Unter Annahme des UV ergibt sich bedeutend bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung, die Abweichungen (letzte Kolonne!) sind kleiner und nicht mehr systematisch.

Ob nicht etwa ungenügende Sättigung den verlangsamten Abfall erklärt, wurde durch einen Parallelversuch kontrolliert. Ein gewöhnliches junges UX-Präparat, von ungefähr gleicher anfänglicher Stärke wie das $UX + UV$-Präparat zeigte einen völlig normalen Abfall mit einer Halbwertszeit von 24,5 Tagen, wie folgende Tabelle zeigt. (Gemessen an der weichen Strahlung.)

Datum	UX beobachtet	UX berechnet
23. XII.	—	129,5
4. I.	92,1	92,1
6. I.	86,5	87,0
7. I.	84,9	84,5
9. I.	78,7	80,0
11. I.	75,5	75,5
13. I.	71,3	71,3
17. I.	64,1	63,6
18. I.	61,9	62,0
20. I.	58,2	58,5
23. I.	53,8	53,7
24. I.	52,2	52,2
27. I.	48,2	48,0
28. I.	47,2	46,6
2. II.	39,7	40,5
3. II.	38,7	39,4
17. II.	26,6	26,5
18. II.	25,8	25,8
10. III.	14,6	14,6

Wir hoffen an Hand weiterer Versuche auf die Frage zurückkommen zu können.

Datum	Zeit in Tagen	Beobachtung	$UX + C$ berechnet $C = 25{,}1$	Abweichungen	$UX + UV + C$ berechnet $C = 24{,}9$ $UV = 14$ Proz. UX	Abweichungen
23. XII. 1921	0	145,4	145,4	0	145,4	0
8. I. 1922	16	102,3	101,6	— 0,7	102,7	+ 0,4
12. I.	20	95,2	93,3	— 1,9	94,7	— 0,5
20. I.	28	80,2	79,5	— 0,7	81,0	+ 0,8
28. I.	36	70,8	68,4	— 2,4	70,1	— 0,7
2./3. II.	41,5	63,1	62,2	— 0,9	63,8	+ 0,7
17./18. II.	56,5	51,9	49,4	— 2,5	50,8	— 0,9
10. III.	77	40,4	38,7	— 1,7	39,9	— 0,5
18. III.	85	37,9	36,0	— 1,9	37,1	— 0,8
11. IV.	109	32,5	30,6	— 1,7	31,4	— 0,9
25. IV.	123	28,9	28,8	— 0,1	29,4	+ 0,5
14. V.	142	27,3	27,3	— 0,0	27,6	+ 0,3
1. VI.	160	26,5	26,4	— 0,1	26,5	+ 0,0

Brüssel, den 15. Dezember 1922.

(Eingegangen 8. Januar 1923.)

Bestimmung der Dipollänge von Chlorwasserstoffmolekülen mittels Elektrostriktionsversuche.

Von O. E. Frivold und Odd Hassel.

Einleitung.

1. Vor kurzem hat Pauli[1]) die Debyesche Theorie der Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante modifiziert, indem er eine quantentheoretische Behandlung zugrunde legt. Wenn man der Übersichtlichkeit halber vom Einfluß der Verschiebungen der Elektronen des Moleküls absieht, kann man die von Debye abgeleitete Formel der Dielektrizitätskonstante in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur schreiben:

$$\frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{\mu^2}{3kT}N \qquad (1)$$

ε = Dielektrizitätskonstante, μ = Dipolmoment eines Moleküls, k = Boltzmannsche Konstante, T = Temperatur abs. gemessen, N = Anzahl der Moleküle pro cm³.

In der von Pauli quantentheoretisch abgeleiteten Formel tritt der Zahlenfaktor 1,54 statt $^1/_3$ in der obigen Formel. Sonst wird die Formel (1) unverändert. Bezeichnet man mit μ_{kl} und μ_{qu} das nach der klassischen Formel bzw. nach der quantentheoretischen Formel berechnete Dipolmoment, so wird nach Pauli:

$$\mu_{kl}=2{,}15\,\mu_{qu}.$$

Außerdem muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Entwickelungen in der Arbeit von Pauli sich ausschließlich auf zweiatomige Dipolmolekülen beziehen, und daß sie unter der Voraussetzung durchgeführt sind, daß das Molekül kein resultierendes Elektronenimpulsmoment besitzt[2]).

Herr Pauli weist auf eine Möglichkeit hin, die zu einer Entscheidung zwischen den beiden Formeln führen kann. Diesbezüglich findet sich in seiner Arbeit folgende für uns in Betracht kommende Bemerkung: „Eine Möglichkeit, experimentell zwischen den beiden Formeln zu entscheiden, liegt vor, wenn das Dipolmoment μ der Substanz anderswoher bekannt ist. Dies ist bei den Halogenwasserstoffen der Fall, wo der Kernabstand aus den ultraroten Spektren genau entnommen werden kann. Dieser Kernabstand ist zwar wegen der Deformation der Elektronenbahnen des Halogenatoms, die vom Felde des Wasserstoffkerns hervorgerufen wird, nicht ganz identisch mit der Dipollänge, doch ist leicht einzusehen, daß diese Deformation immer eine Verkleinerung des Dipolmoments bewirkt. Liefert also die klassische Formel für die Dielektrizitätskonstante eine Dipollänge, die größer ist als der aus den ultraroten Spektren entnommene Kernabstand, so ist sie zu verwerfen".

Aus dem Voranstehenden geht hervor, daß eine Entscheidung nur möglich wird, wenn der Abstand zwischen dem Wasserstoffkern und dem Schwerpunkte der resultierenden negativen Ladung des Halogenions größer ist als der halbe Kernabstand. Oder genauer gesagt: wenn man die Dipollänge und den Kernabstand bzw. mit r und R bezeichnet, muß die Ungleichung bestehen $\frac{1}{2}R<r<R$, damit eine Entscheidung möglich sein wird. Denn eine Dipollänge, welche größer als der Kernabstand ist, ist ausgeschlossen. Ist andererseits die Dipollänge kleiner als der halbe Kernabstand, so gibt nach Pauli auch die klassische Formel eine Dipollänge, welche kleiner ist als der Kernabstand. Beide Formeln führen in diesem Falle zu Ergebnissen, welche qualitativ zu erwarten sind, wodurch eine Entscheidung unmöglich gemacht wird.

Da die Dielektrizitätskonstanten der betreffenden Gase nicht bekannt waren, bestand damals keine Möglichkeit für eine Entscheidung zwischen den beiden Formeln. Kurz nachher teilte aber Herr Falkenhagen[1]) in einer Arbeit die Resultate von gemeinsam mit H. Weigt ausgeführten Messungen der Dielektrizitätskonstante von HCl mit. Sie finden für

$$HCl\,\mu=2{,}15\cdot10^{-18}\ \text{C.G.S.}$$

Daraus ergibt sich für die Dipollänge, wenn man dem Elementarquantum den Wert beilegt $e=4{,}77\cdot10^{-10}$ C.G.S.: $r=0{,}45\cdot10^{-8}$ cm. Aus den Linienabständen des ultraroten Absorptionsspektrums findet man nach Kratzer[2])

$$r=1{,}265\cdot10^{-8}\ \text{cm}.$$

Der nach der klassischen Formel berechnete Dipolabstand ist danach wesentlich kleiner als der Kernabstand (etwa $^1/_3$ des Kernabstands). Rührt deshalb dieser große Unterschied zwischen Kernabstand und Dipollänge nicht wesentlich von Meßfehlern her, wird eine Entscheidung mit HCl nach dem Vorschlag von Pauli nicht möglich.

Unter diesen Umständen dürfte es von Bedeutung sein, die Dipollänge von HCl mittels Elektrostriktionsversuchen zu bestimmen, um diese Frage näher zu beleuchten. Im Anschluß an früher ausgeführten Elektrostriktionsmessungen mit Schwefeldioxyd[3]) wurden auch des-

1) W. Pauli, jr., Zeitschr. f. Phys. **6**, 319, 1921.
2) Was diesen letzteren Punkt betrifft, sei auf eine demnächst in der Zeitschr. f. Phys. erscheinende Arbeit von H. A. Kramers und W. Pauli, jr. verwiesen.

1) H. Falkenhagen, diese Zeitschr. **23**, 87, 1922.
2) A. Kratzer, Zeitschr. f. Phys. **3**, 305, 1920.
3) Diese Zeitschr. **22**, 603, 1921.

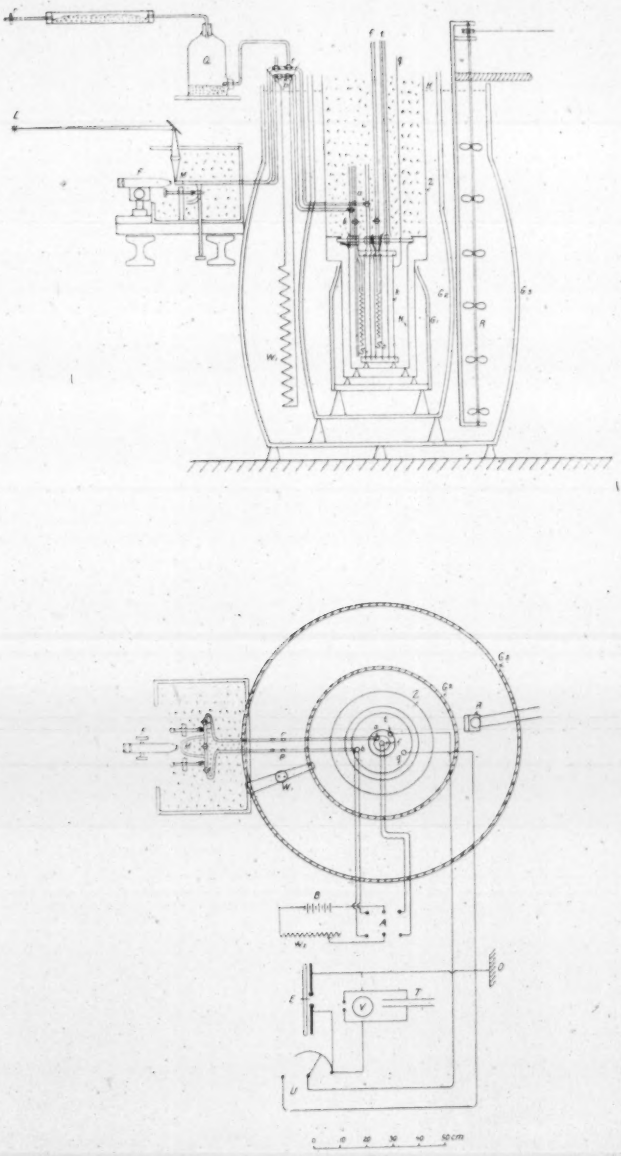


Fig. 1.

halb Messungen mit HCl ausgeführt. Es zeigte sich aber sehr schwierig, das Dipolmoment für HCl mittels Elektrostriktionsversuche zu bestimmen, auch nach Verbesserung der früher verwendeten Apparatur. Dies rührt davon her, daß dieses Gas außerordentlich leicht Feuchtigkeit aufnimmt, wodurch die elektrische Isolation ganz verdorben wird. Obgleich aber die Messungen mit HCl keine Anforderung auf große Genauigkeit Anspruch machen, dürften sie doch für die betreffende Frage Bedeutung haben.

Die Versuchsanordnung.

2. Da die Versuchsanordnung a. a. O. beschrieben ist, wird es nur nötig sein, sie hier mit besonderem Hinblick auf die vorgenommenen Verbesserungen in den Hauptzügen anzugeben.

Ein geschlossener Zylinderkondensator steht mittels eines Rohres, in welchem das Mikromanometer (Indikator) eingeschaltet ist, in Verbindung mit einem Schutzgefäß. Das Mikromanometer besteht aus einer Kapillare mit quadratischem Querschnitt und kann mit Tabaksrauch gefüllt werden. Mittels ultramikroskopischer Beleuchtung werden die Partikeln in einem Mikroskop sichtbar. Die Druckzunahme, welche in der Gasmenge stattfindet, wenn man im Kondensator einen Spannungsunterschied anlegt, wird durch die Verschiebungen der Rauchpartikeln im Mikromanometer gemessen. Die ganze Apparatur (mit Ausnahme des Mikromanometers) wurde in einem großen Thermostat (von etwa 1000 Liter Rauminhalt bei diesen Messungen) angebracht, um ein möglichst großes Temperaturgleichgewicht im System zu erzielen.

In Fig. 1 sind die verschiedenen Bestandteile des ganzen Systems mit folgenden Bezeichnungen angegeben: k Zylinderkondensator, M Mikromanometer, $arMpb$ das Rohrsystem, welches den Kondensator mit dem Schutzgefäß N verbindet, t Hochspannungsleitung, q Erdleitung, F Mikroskop und L Bogenlampe. Kondensator mit Schutzgefäß sind vom Zinkgefäß Z (oben mit Baumwolle gefüllt) umgeben. G_1 und G_2 sind zwei Holzgefäße, welche Strömungen im Wasser verhindern. Der Thermostat ist bis H mit Wasser gefüllt. Das Wasser im äußeren Wassermantel wurde mittels zweier Rührer (die eine R ist in Fig. 1 eingezeichnet) in Zirkulation gebracht. Die Temperatur im äußeren Wassermantel wurde mittels elektrischer Heizung (W_1 ist eine der zwei Widerstandsspiralen), Toluolregulator und Relais wochenlang auf einer Temperatur gehalten, die nur innerhalb etwa 0,002° C schwankte (an einem Beckmann-Thermometer konnte etwa 0,001° C geschätzt werden). Die Verbesserung besteht wesentlich in dieser letzten Vorrichtung und darin, daß das Rohrsystem außerhalb des Thermostaten (Zuleitungen zum Mikromanometer) möglichst kurz angefertigt wurde. Wird ein schwacher elektrischer Strom (B Stromquelle, W_2 Regulierungswiderstand) durch eine der zwei Widerstandspiralen S_1 oder S_2 (im Schutzgefäß und im Kondensator) geschickt, so kann man die kleinen Temperaturunterschiede zwischen Kondensator und Schutzgefäß ausgleichen. Die Hochspannungsvorrichtung (E Influenzmaschine, V Kelvin-Voltmeter, T Leydner Flasche, U Kommutator) ist aus Fig. 1 ersichtlich.

Die Versuchsergebnisse.

3. Das Chlorwasserstoffgas wurde durch Zutröpfeln von konz. H_2SO_4 in $NaCl$ (puris) dargestellt und wurde durch eine Waschflasche mit konz. H_2SO_4, dann durch zwei Türme mit KCl und zwei Glasröhren teilweise mit P_2O_5 gefüllt geleitet. Mittels eines kleinen Überdruckes wurde das gut getrocknete Gas (bei f eingeleitet und bei r ausgeleitet) mehrere Stunden (bei den zuletzt ausgeführten Messungen während 12 Stunden) durch den Kondensator geleitet. Auch zwischen dem Dreiweghahn r und der Öffnung des Rohres (Hahn r') ist ein Reservoir (Q) teilweise mit P_2O_5 gefüllt, ein Glasrohr mit P_2O_5 und ein Turm mit KCl eingeschaltet.

Durch diese Vorsichtsmaßregel wird verhindert, daß Feuchtigkeit der Luft sich mit dem Gas im Kondensator vermischt, und bei der Öffnung des Hahnes r' bei Unterdruck im Kondensator Luft in den Kondensator einströmt[1]).

Es wurden zwei Versuchsreihen mit Chlorwasserstoffgas ausgeführt. Bei der endgültigen Versuchsreihe wurden keine Gummiverbindungen zwischen dem Gasentwicklungsapparat und der Ausströmungsöffnung r' verwendet, indem alle Verbindungsstellen zusammengeblasen oder mit Picein gut gedichtet wurden. Die ersten Versuche, welche qualitativer Natur sind, zeigten, daß die Volumenkontraktionen etwa dieselben waren wie bei den früheren Versuchen mit Schwefeldioxyd (bei denselben Spannungsunterschieden ausgeführt), d. h. daß das Dipolmoment von den Chlorwasserstoffmolekülen etwa 1 bis $2 \cdot 10^{-18}$ C.G.S. ist. Es konnte leider nicht eine Zeitlang Messungen ausgeführt werden (wie mit SO_2), da der Kondensator nicht längere Zeit die Spannung erträgt. Obgleich der im Mikromanometer eingeblasene Tabaksrauch über P_2O_5 gut

1) Ein Vorversuch zeigte nämlich, daß ein Unterdruck im Kondensator nach tagelangem Stehen des Systems vorhanden war. Die Ursache dieses Unterdrucks ist aber nicht leicht zu sehen.

Tabelle.

Volumen des Kondensators $v_i = 2502$ cm³.
Volumen des Schutzgefäßes $v_a = 12405$ cm³.

$$\text{Reduktionsfaktor } \gamma = \frac{v_a}{v_a + v_i} = 0{,}833 \text{ cm}^3.$$

Mikrometervergrößerung = $1{,}339 \cdot 10^{-3}$ cm/Skt.
$k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg., $\alpha = 2{,}744 \cdot 10^{-24}$.
$L = 36{,}35$ cm, $R_1 = 1{,}48$ cm, $R_2 = 2{,}96$ cm, $R_3 = 3{,}18$ cm, $R_4 = 4{,}77$ cm.

$$\Delta v_{\text{korr.}} = \frac{\Delta v}{\gamma}.$$

Temperatur T (abs.)	Querschnitt des Manometers in cm²	Verschiebung l für $(v_2 - v_1)^2 = 1000$ C.G.S. Skt.	cm 10^{-2}	Kontraktion Δv cm³	$\Delta v_{\text{korr.}}$ cm³	Anzahl d. Beobachtungen	μ cm$^{5/2}$ g$^{1/2}$ sec^{-1}	Dipollänge cm	Dipollänge nach Falkenhagen u. Weigt	Kernabstand cm
292,5	$3{,}84 \cdot 10^{-3}$	37,7	5,05	$1{,}94 \cdot 10^{-4}$	$2{,}33 \cdot 10^{-4}$	17	$1{,}48 \cdot 10^{-18}$	$0{,}31 \cdot 10^{-8}$	$0{,}45 \cdot 10^{-8}$	$1{,}265 \cdot 10^{-8}$

getrocknet, ehe er ins Mikromanometer eingeleitet wurde, ist es jedoch nicht ausgeschlossen, daß der eingeblasene Rauch Spuren von Feuchtigkeit mit sich führt, welche die Isolation verdirbt. Auch gibt vielleicht die Hahnschmierung (Adaebs lanae) etwas Wasser ab.

War der Kondensator vor Einleitung des Gases nicht infolge von früheren Versuchen verdorben, so zeigte sich stets, daß der Kondensator die Spannung auch nach Einleitung des Chlorwasserstoffgases, bis einige Messungen ausgeführt worden waren, gut hält. Die Erweiterung einer Versuchsreihe, bis genügend viele Beobachtungen ausgeführt waren, erwies sich jedoch in beiden Versuchsreihen als unausführbar, da die Isolation im Kondensator aus irgendeinem Grunde verhältnismäßig plötzlich versagte, auch spürten wir keine Verbesserung, wenn wir nachher trockenes Chlorwasserstoffgas durch das System leiteten. Der Kondensator mit Schutzgefäß wurde deshalb vor der letzten Versuchsreihe demontiert und gut gereinigt[1]).

In Fig. 2 sind die Meßresultate graphisch dargestellt.

Die Ordinaten geben die Verschiebungen l im Mikromanometer, die Abszissen die entsprechenden Spannungen im Quadrat an. Die eingezeichnete Grade ist aus den Beobachtungen mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. In der Tabelle ist daraus l für

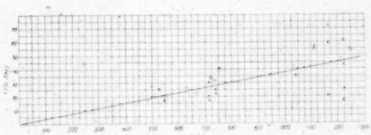


Fig. 2.

$$(v_2 - v_1)^2 = 1000 \text{ C.G.S.}$$

berechnet.

In der Tabelle sind die für die Berechnung des Dipolmoments μ nötigen Angaben zusammengestellt. Aus Gleichung (14) a. a. O. berechnet sich dann das Dipolmoment.

$$\mu = \left[\frac{kT}{0{,}4343\,\pi L \left(\frac{1}{\log \frac{R_4}{R_3}} + \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_1}} \right)} \frac{\Delta v}{(v_2 - v_1)^2} - \alpha \right]^{1/2} \sqrt{3kT}. \qquad (14)$$

Hier gibt L die Länge des Kondensators, R_1, R_2, R_3, R_4 die Radien der Zylinder, Δv die gemessene Kontraktion an.

α ist eine Konstante, welche sich aus dem Ausdrucke der Molekularrefraktion entnehmen läßt. Was die Ausmessung vom Mikromanometer usw. betrifft, muß auf die frühere Arbeit hingewiesen werden.

Die in der Tabelle angegebenen Dipollängen

[1]) Bis die Isolation im Kondensator ganz versagte, wurde kein Ladungsverlust nach Anlegung der Spannung mittels des Umschalters U bei den orientierenden Versuchen beobachtet. Bei den endgültigen Versuchen dagegen wurde ein kleiner Ladungsverlust beobachtet, nachdem das Gas etwa 12 Stunden durchgeströmt hatte und der Kondensator mit Zuleitungen aufgeladen war. Da wir aber in beiden Versuchsreihen die gleichen Kontraktionen beobachtet haben (für die gleichen Spannungsdifferenzen), darf man annehmen, daß der beobachtete Ladungsverlust in der letzten Versuchsreihe keinen systematischen Fehler verursacht haben kann.

sind beide mittels Formeln berechnet, welche sich auf die klassischen Vorstellungen stützen. Nach der quantentheoretischen Formel von Pauli werden die Dipollängen etwa die Hälfte der oben angegebenen.

Aus der Tabelle geht hervor, daß die nach den Elektrostriktionsversuchen bestimmte Dipollänge etwas kleiner wird als diejenige, welche aus den Messungen der Dielektrizitätskonstante sich berechnen läßt. Die beiden Werte der Dipollängen sind jedenfalls wesentlich kleiner als der Kernabstand (etwa $^1/_3$ des Kernabstands[1]). Demnach wird eine Entscheidung zwischen der klassischen Formel (1) und der von Pauli abgeleiteten Formel nach Messungen mit Chlorwasserstoffgas nicht möglich.

Es wäre von Interesse, auch die Dipollänge und den Kernabstand für die übrigen Halogenwasserstoffe vergleichen zu können. Da aber die Dipollängen dieser Verbindungen, und was das Gas HJ betrifft auch den Kernabstand, nicht bekannt sind, ist eine weitere Prüfung mit zweiatomigen Molekülen zurzeit nicht möglich.

1) In dieser Verbindung dürfte es von Interesse sein zu bemerken, daß auch bei den drei mehratomigen Gasen CO_2, SO_2 und NH_3 sowie bei Wasserdampf die Dipollängen, welche sich mit Hilfe der klassischen Theorie berechnen lassen, sämtlich wesentlich kleiner sind als die gaskinetischen Moleküldurchmesser.

Christiania, November 1922.

(Eingegangen 22. Dezember 1922.)

Nachtrag zu meiner Arbeit „Dichtebestimmungen an Lösungen nebst Bestimmung der Dichteunterschiede zwischen Wasser und Wasser mit Luft gesättigt“ (diese Zeitschr. 21, 529—534, 1920).

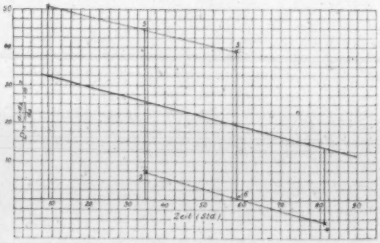
Von O. E. Frivold.

In der angegebenen Arbeit wurde die Neukonstruktion eines Apparates von A. Piccard und E. Cherbulicz für Dichtebestimmungen von Lösungen beschrieben. Nebenbei wurden auch die Resultate angegeben, welche bei der Bestimmung des Dichteunterschiedes zwischen reinem und mit Luft gesättigtem Wasser erhalten wurden. Da aber die Tabelle IV der erwähnten Arbeit, was die Zeitangaben betrifft, nicht vollständig ist, und da auch das Berechnungsverfahren nur kurz besprochen ist, halte ich es für notwendig, diese Frage näher zu erörtern.

Die benutzte Methode beruht auf dem Prinzip der kommunizierenden Röhren. Was die Einzelheiten betrifft sei auf die früher veröffentlichte Arbeit hingewiesen, wo die Apparatur und ihre Verwendung eingehend beschrieben ist. Nur die Tabelle IV dieser Arbeit soll hier mit vervollständigten Zeitangaben erneut wiedergegeben werden.

Hier gibt d_1 die Dichte der Flüssigkeit auf der linken, d_2 die Dichte auf der rechten Seite des U förmigen Rohres an. Die vier angegebenen Messungen wurden, wie aus der Tabelle hervorgeht, abwechselnd mit luftfreiem H_2O und mit luftgesättigtem H_2O auf der linken Seite des U förmigen Rohres ausgeführt.

Außerdem wurden die Zeitintervalle zwischen den einzelnen Messungen, wie die Tabelle zeigt, etwa gleich groß gewählt. Unter diesen Umständen besteht die Möglichkeit, den systematischen Fehler, dessen Ursache früher näher diskutiert wurde, und welcher sich, wie die Tabelle zeigt, stark bemerkbar macht, zu eliminieren.



Wir tragen die Resultate der Tabelle IV in ein Diagramm ein, in dem die Abszissen die Zeit, die Ordinaten die Größe

$$D = \frac{d_1 - d_2}{d_2} \cdot 10^7$$

darstellen. Die 4 Meßresultate werden dann

Tabelle IV.

Nr.	Zeit		$D = \frac{d_1 - d_2}{d_2} \cdot 10^7$	Temp. des H_2O während Sättigung mit Luft	Anmerkung.
	Datum	Uhr vorm.			
1	3.3	9h 10m	+ 50,6	15,6	Links luftfreies H_2O.
2	4.3	10h 37m	+ 6,95	15,7	Links H_2O mit Luft gesättigt.
3	5.3	10h 25m	+ 38,8	15,5	Links luftfreies H_2O.
4	6.3	8h 45m	— 6,2	15,6	Links H_2O mit Luft gesättigt.

durch die Punkte 1, 2, 3 und 4 repräsentiert. Wären die Messungen vom systematischen Fehler befreit, so würden die Punkte 1, 2, 3 und 4 in gleich großen Abständen von der Abszissenachse, aber abwechselnd ober- und unterhalb derselben gruppiert sein. Ist aber die Bedingung erfüllt, daß der Einfluß des systematischen Fehlers zeitlich konstant ist oder linear zu- oder abnimmt, so kann man den gesuchten Dichteunterschied aus den Beobachtungsdaten in der Tabelle IV dennoch bestimmen.

Bei den Messungen 1 und 3 addiert sich der Einfluß des systematischen Fehlers zu dem zu bestimmenden Dichteunterschied, im Falle 2 und 4 mißt man dagegen die Differenz dieser zwei Größen. Wir betrachten erst die Bestimmung von D, welche sich aus den drei ersten Messungen ableiten läßt. Unter der Voraussetzung, daß sich der systematische Fehler zeitlich linear ändert, wird es einleuchtend, daß für die Zeit, zu der die Messung 2 ausgeführt wurde, die Ordinate des Punktes 5 die Summe vom Dichteunterschiede und systematischen Fehler darstellt. Da die Differenz dieser zwei Größen durch den Punkt 2 bestimmt ist, gibt die Strecke 2,5 dann den doppelten gesuchten Dichteunterschied an. In ganz entsprechender Weise entnimmt man aus der graphischen Darstellung mittels der drei letzten Messungen 2, 3 und 4 den doppelten Dichteunterschied aus dem Abstande 3,6. Durch direkte Ausmessung bekommt man auf diese Weise für D bzw. $18{,}75 \cdot 10^{-7}$ und $19{,}15 \cdot 10^{-7}$. Der Mittelwert wird also $18{,}95 \cdot 10^{-7}$. Früher wurde mittels der arithmetischen Rechnung, die im Prinzip auf dasselbe hinausläuft, wie die hier besprochene graphische Methode, $19{,}04 \cdot 10^{-7}$ als Mittelwert gefunden.

Wie erwähnt ist die lineare Änderung des Einflusses des systematischen Fehlers mit der Zeit eine notwendige Voraussetzung dafür, daß das hier verwendete Berechnungsverfahren des Dichteunterschiedes einwandfrei ist. Was die Frage der Richtigkeit dieser Voraussetzung betrifft, so sei folgendes bemerkt.

Wenn es überhaupt möglich ist, eine Linie in der Weise in dem Diagramm einzuzeichnen, daß die Ordinatenstücke zwischen dieser Linie und den Punkten 1, 2, 3 und 4 gleich groß sind, so ist die geforderte Bedingung erfüllt. Die Ordinaten dieser Grade geben dann für jeden Zeitpunkt den Einfluß des systematischen Fehlers an, und der gesuchte Dichteunterschied ist durch die oben erwähnten gleich großen Ordinatenstücke bestimmt. Fig. 1 zeigt nun, daß dies in der Tat möglich ist[1]).

In der angegebenen Arbeit wurde außerdem auf drei Korrektionen aufmerksam gemacht. „Die eine Korrektion beruht darauf, daß die Temperatur in dem Gefäß a_2 im allgemeinen nicht die gleiche ist wie in den Röhren A, B" (S. 533 der angegebenen Arbeit). Da aber der Apparat in einem Kellerraume aufgestellt wurde, wo nur ganz kleine Temperaturdifferenzen vorhanden waren, wird diese Korrektur nicht merkbar.

„Die zwei anderen Korrekturen rühren davon her, daß der Luftdruck sich an der Oberfläche beim Heben oder Senken des Gefäßes a_2 ändert, und daß die von dem in das Gefäß eintauchenden Rohr verdrängte Flüssigkeitsmenge beim Heben oder Senken sich verändert". Ich möchte hierzu nur hinzufügen, daß die zwei letzten Korrekturen einander entgegenwirken, und daß sie sich im gegebenen Falle durch geeignete Dimensionierung des Gefäßes a_2 und des in dasselbe eintauchenden Rohres kompensieren.

1) Es ist natürlich unbefriedigend, daß ein systematischer Fehler die Messungen so stark beeinflußt, wie es aus der Tabelle und der Figur hervorgeht, um so mehr als die Möglichkeit bestand, diesen Fehler jedenfalls größtenteils zu beseitigen; diese Untersuchung konnte damals jedoch aus äußeren Gründen nicht weitergeführt werden.

Christiania, im November 1922.

(Eingegangen 22. Dezember 1922.)

Das Verhalten der Maßstäbe in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von W. Cauer.

Einstein hat in seiner „Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" 1916 durch das Beispiel des rotierenden Bezugssystems auf die Notwendigkeit der nichteuklidischen Geometrie in der Relativitätstheorie hingewiesen. Gegen die dortige Fassung des Beweises ist ein Einwand möglich. Die Ausmessung eines bloß gedachten Kreises von zwei verschiedenen Bezugssystemen aus hat keinen physikalischen Sinn. Mißt man aber z. B. den Umfang einer ruhenden Metallscheibe mit rotierenden Maßstäben, so liefert das keinen Anhalt für die Geometrie der in Rotation versetzten Scheibe. Sie könnte von den auftretenden Spannungen, d. h. vom Material abhängen. Tatsächlich handelt es sich um eine Eigenschaft von Maßstäben allein, deren Bedeutung in folgendem Gedankenexperiment besonders hervortritt. Speichen und Kranz eines Rades seien aus starren Stäben (Maßstäben) zusammengesetzt; die Stäbe mögen unverbunden aneinander stoßen. Das gegen ein Inertialsystem in Rotation gebrachte Rad

wird dann nach der speziellen Relativitätstheorie am Umfange zwischen den einzelnen Stäben Lücken aufweisen.

Vor einer Berechnung des Umfangs muß genau definiert werden, welcher physikalische Sinn mit dem Begriff Streckengeometrie zu verbinden ist. Es soll darunter ein durch Anlegen von Maßstäben ohne Benutzung weiterer Hilfsmittel feststellbarer metrischer (Riemannscher) Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines irgendwie bewegten Systems materieller Punkte verstanden werden. Vorbedingung einer Streckengeometrie ist also die Möglichkeit starrer Verbindungen zwischen den betrachteten materiellen Punkten zu einem starren Gerüst. Der durch v. Laue geführte Beweis der Unmöglichkeit eines starren Körpers[1]) in der Relativitätstheorie zeigt, daß sich ein derartiges Gerüst nicht streng, sondern nur mit beliebiger Annäherung durch Ausschaltung störender Einflüsse realisieren läßt. Wenn nun ein System materieller Punkte Streckengeometrie besitzt, so fragt es sich, welche Beziehung zwischen ihr und der Weltgeometrie, d. h. dem Verhalten von Eigenzeit messenden Uhren oder Lichtsignalen, besteht. Existiert für das starre Gerüst ein statisches Ruhesystem $\left(g_{i4} = 0,\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^4} = 0\right)$, so ist eine solche Beziehung dadurch eindeutig gegeben, daß der räumliche Teil des Weltlinienelementes die Streckengeometrie darstellt. Dieser Fall liegt aber gerade bei dem gegen ein Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Bezugskörper nicht vor. Gilt nämlich in einem ersten Koordinatensystem das euklidische Linienelement

$$ds^2 = dr'^2 + r'^2 dq^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2,$$

so soll als Bewegungsgesetz für materielle Punkte $r = r'$, $z = z'$, $\vartheta = q - \omega t'$ vorgeschrieben sein. Zwischen ihnen sind offenbar starre Verbindungen möglich, da die Bewegung stationär ist. Mit $t = t'$ lautet das Linienelement für das rotierende Bezugssystem

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2 + 2r^2\omega d\vartheta dt - (c^2 - \omega^2 r^2) dt^2.$$

Es existiert für die rotierenden materiellen Punkte kein statisches Ruhesystem, weil ihre Weltlinien kein Normalensystem bilden.

Eine Streckengeometrie invariant zu definieren, genügt jedoch nicht. Sie hat nur physikalische Bedeutung, wenn ihre Maßform sich durch Maßstäbe ermitteln läßt. Wir müssen daher vor allem über das Verhalten der Maßstäbe im klaren sein. Hilbert schreibt in den „Grundlagen der Physik" (2. Mitteilung) dem Maßstab die Eigenschaft zu, räumliche Weltlinienelemente zu messen, ganz analog, wie eine Uhr, welche Eigenzeit zeigt, zeitliche Weltlinienelemente mißt. Der Maßstab ist nach ihm in gleicher Weise wie die Uhr geeignet, die g_{ik} zu bestimmen, keines der beiden Instrumente erscheint vor dem andern bevorzugt. Dieser allgemeingültig postulierte Zusammenhang zwischen dem Verhalten von Maßstäben und Uhren läßt sich mit dem im besonderen Falle des statischen Feldes oben erwähnten Zusammenhange logisch nicht vereinen und widerspricht der physikalischen Beschaffenheit der wirklichen Maßstäbe.

Im Gegensatz zu Hilbert und den italienischen Mathematikern, die sich mit dem stationären Feld $\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^4} = 0\right)$ befassen, gehen wir von dem Postulat aus: ein Maßstab besitzt die für ihn charakteristische Eigenschaft, daß die Weltlinien seiner Endpunkte äquidistant sind[1]). Ihr Abstand ist nach Definition die Länge des Maßstabes. Die erwähnte Beziehung zwischen Strecken- und Weltgeometrie im statischen Felde ist auf diese Weise axiomatisch begründet. In einem beliebigen Felde denken wir uns jetzt einen Bezugskörper durch eine stetig bewegte dreifach unendliche Schar von Koordinatenuhren mit stetig verteilten veränderlichen Ganggeschwindigkeiten realisiert. Jede Uhr sei durch drei räumliche Koordinaten individualisiert, ihre Zeigerstellung gebe die vierte Koordinate des jeweils koinzidierenden Punktereignisses an. Der Abstand der Weltlinien zweier benachbarter Koordinatenuhren läßt sich nun nicht nur im statischen Fall, sondern immer durch eine quadratische Form der räumlichen Koordinatendifferentiale ausdrücken, welche die lokale Geometrie in einem zu den Weltlinien senkrechten dreidimensionalen Flächenelemente darstellt — wenn der Ausdruck „Geometrie eines Flächenelementes" erlaubt ist —, und in der nur die g_{ik} vorkommen. Die Aufgabe ist gleichbedeutend damit, die g_{i4} in irgendeinem Weltpunkt x_1, x_2, x_3, x_4 durch eine geeignete Transformation der Zeit zum Verschwinden zu bringen. Hierzu genügt bloßes Verstellen der Koordinatenuhren nach der Vorschrift

$$x_4 = x'_4 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3.$$

Damit wird

$$ds^2 = (g_{ik} + 2a_k g_{i4} + a_i a_k g_{44}) dx^i dx^k + (g_{i4} + a_i g_{44}) dx^i dx'^4 + g_{44} dx'^{4^2},$$

so daß man

$$a_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{g_{i4}}{g_{44}}$$

1) Diese Zeitschr. 12, 85, 1911.

1) Vgl. hierzu den starren Körper von Born, Ann. d. Phys. 30, 1, 1909.

zu wählen hat. Die Elimination liefert die gesuchte quadratische Form[1])

$$d\sigma^2 = \left(g_{ik} - \frac{g_{i4}g_{k4}}{g_{44}}\right) dx^i dx^k =$$

$$= a_{ik} dx^i dx^k, \quad a_{ik} = \frac{g_{ik} - g_{i4}g_{k4}}{g_{44}} \; (i, k = 1, 2, 3).$$

Diese quadratische Form kann man auch in folgender Weise herleiten, worauf mich Herr Professor v. Laue aufmerksam machte. Sei dx die Weltlinienrichtung, δx der senkrechte Verbindungsvektor benachbarter Weltlinien, $\delta_1 x$ ein beliebiger Verbindungsvektor. Dann gilt $\delta x^i = \delta_1 x^i$, $dx^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $g_{ik}\delta x^i dx^k = 0$ oder $g_{i4}\delta x^i dx^4 + g_{44}\delta x^4 dx^4 = 0$, daher

$$\delta x^4 = -\frac{g_{i4}\delta x^i}{g_{44}}$$

und das Quadrat des gesuchten Abstandes

$$d\sigma^2 = \sum_1^4 g_{ik}\delta x^i \delta x^k = \sum_1^3 \left(g_{ik} - \frac{g_{i4}g_{k4}}{g_{44}}\right) \delta x^i \delta x^k.$$

Nach der Herleitung verhält sich $d\sigma^2$ natürlich kovariant zu ds^2 bei der Transformationsgruppe $x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$, $x'_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$, wie man sich auch durch Ausrechnen überzeugen kann. Nur wenn für einen materiellen Punkt des Bezugskörpers $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^4} = 0$ ist, läßt sich für ihn $d\sigma^2$ allein mit dem Maßstab bestimmen, ganz analog, wie man nach Hilbert l. c., die Weltgeometrie mit einer Eigenzeit zeigenden Uhr messen kann. Denn nur dann sind starre Verbindungen zwischen den umgebenden Punkten herstellbar. (Nimmt man Lichtsignale zu Hilfe, so läßt sich allerdings $d\sigma^2$ durch „gleichzeitige" Ablesung an den Enden des Maßstabes messen. Dies kommt aber einer rechnerischen Ermittlung der Form $d\sigma^2$ aus ds^2 gleich, da, wie noch gezeigt werden wird, Maßstäbe und Lichtsignale zur Messung der Weltgeometrie ausreichen). Für den ganzen Bezugskörper ist $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^4} = 0$ z. B. bei der rotierenden Scheibe erfüllt, die zu Anfang betrachtet wurde. Hier erhält man

$$d\sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\vartheta^2}{1 - \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2}$$

als Streckengeometrie. Es muß betont werden, daß dies nicht die Geometrie einer Fläche $x_4 = \text{const}$ darstellt. Das ist nur der Fall, wenn die Bahnkurven der Punkte des Bezugskörpers (Koordinatenuhren) ein Normalensytem bilden[1]). Wenn $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^4} \neq 0$, kann man dagegen schon nicht mehr einen aus starren Stäben bestehenden mit Diagonalversteifungen versehenen Würfel an dem materiellen Punkt befestigen, obgleich das immer mit einem starren Tetraeder möglich ist.

Das Verhalten der Maßstäbe liefert einen Gesichtspunkt für die Wahl der Bezugskörper. Bevorzugt sind diejenigen Bezugskörper, die ein starres Gerüst bilden, wenn solche existieren. Andernfalls lassen sich doch in den praktisch vorkommenden Feldern stets Bezugskörper wählen, die wenigstens näherungsweise starr sind. Solche, die streng genommen Streckengeometrie besitzen, also bevorzugt sind, gibt es im statischen und im stationären Feld, aber nicht nur in diesen.

Im folgenden soll auf Grund des Axioms über die Maßstabsbeschaffenheit die Brauchbarkeit eines starren Stabes, an dessen Enden Spiegel befestigt sind, als Eigenzeit messende Lichtuhr nachgewiesen werden. Hin- und Rückgang eines Lichtsignals werden im Weltraum durch einen Nullvektor $\delta_1 x$ von der Weltlinie des ersten Spiegels bis zur Weltlinie des zweiten Spiegels und einen Nullvektor $\delta_2 x$ von der Weltlinie des zweiten Spiegels bis zu der des ersten abgebildet. Man hat

$$\delta_1 x^i = -\delta_2 x^i = \delta x^i \; (i = 1, 2, 3);$$

für den ersten Spiegel beträgt der Zeitzuwachs bis zum Wiedereintreffen des Lichtsignals

$$dx^4 = \frac{c\,d\tau}{\sqrt{-g_{44}}} = \delta_1 x^4 + \delta_2 x^4,$$

ferner ist

$$g_{ik}\delta x^i \delta x^k + 2g_{i4}\delta x^i \delta_1 x^4 + g_{44}\delta_1 x^4 = 0$$

oder

[1]) Weyl, Ann. d. Phys. **54**, 126, 1917.

[1]) Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß der Rang der Matrix

$$\begin{vmatrix} g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \\ 0 & g_{14,2} & g_{14,3} & g_{14,4} \\ g_{24,1} & 0 & g_{24,3} & g_{24,4} \\ g_{34,1} & g_{34,2} & 0 & g_{34,4} \\ g_{44,1} & g_{44,2} & g_{44,3} & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(g_{i4,k} = \frac{\partial g_{i4}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k4}}{\partial x^i}\right)$$

kleiner als 3 ist. Die Weltlinien des Bezugskörpers lassen sich nämlich als Kraftlinien eines Vektors P auffassen, dessen kovariante Komponenten im gegebenen Koordinatensystem $g_{14} \ldots g_{44}$ lauten. Es existiert aber dann und nur dann ein integrierender Faktor λ, so daß $\lambda P_i dx^i = d\varphi$, wenn der Rang der Matrix

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 0 & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & 0 & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & 0 & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(P_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial x^k} - \frac{\partial P_k}{\partial x^i}\right)$$

kleiner als 3 ist (vgl. z. B. E. v. Weber, Vorl. üb. d. Pfaffsche Problem).

$$\delta_1 x^4 = -\frac{g_{i4}\delta x^i}{g_{44}} + \frac{1}{g_{44}}\sqrt{\left(g_{ik}-\frac{g_{i4}g_{k4}}{g_{44}}\right)\delta x^i \delta x^k},$$

$$g_{ik}\delta x^i \delta x^k - 2g_{i4}\delta x^i \delta_2 x^4 + g_{44}\delta_2 x^4 = 0$$

oder

$$\delta_2 x^4 = +\frac{g_{i4}\delta x^i}{g_{44}} - \frac{1}{g_{44}}\sqrt{\left(g_{ik}-\frac{g_{i4}g_{k4}}{g_{44}}\right)\delta x^i \delta x^k}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist wegen der Hilbertschen Bedingung $g_{44}<0$ positiv zu nehmen, damit $\delta_1 x^4>0$ und $\delta_2 x^4>0$ wird. Man erhält so

$$\delta\tau = \frac{2\sqrt{a_{ik}\delta x^i \delta x^k}}{c}.$$

Wegen der Unveränderlichkeit von $a_{ik}\delta x^i \delta x^k$ ist damit der gewünschte Nachweis geführt.

Schließlich läßt sich noch die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Richtung des ausgesandten Lichstrahls in jedem Falle zeigen. Wir betrachten jetzt nur den Hinweg $\delta_1 x$ des Lichtes von einem bis zum andern Ende eines starren Stabes. Die Lichtgeschwindigkeit $\frac{d\sigma}{d\tau}$ wird invariant so definiert, daß

$$d\sigma = \sqrt{a_{ik}\delta x^i \delta x^k}$$

und $d\tau$ die zwischen Aussendung und Ankunft des Lichtsignals vom zweiten Endpunkt des Stabes zurückgelegte Eigenzeit bedeutet. Der Zeitpunkt der Lichtaussendung für den zweiten Endpunkt wird hierbei durch einen die Weltlinien der Endpunkte verbindenden senkrechten Vektor δx bestimmt. Für den zweiten Endpunkt ist dann

$$dx^4 = \frac{c\,d\tau}{\sqrt{-g_{44}}} = \delta_1 x^4 - \delta x^4,\ dx^i = 0\ (i=1,2,3).$$

Aus

$$g_{ik}dx^i \delta x^k + g_{i4}(dx^i \delta x^4 + \delta x^i dx^4) + g_{44}dx^4 \delta x^4 = 0$$

folgt

$$\delta x^4 = -\frac{g_{i4}\delta x^i}{g_{44}},$$

daher ist stets $\frac{d\sigma}{d\tau} = c$, was bewiesen werden sollte. Hiermit wird nur die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie im Unendlichkleinen bestätigt, ohne das Koordinatensystem zu spezialisieren. Die von dieser vorausgesetzte Eigenschaft der Maßstäbe ist eben ein Sonderfall der hier postulierten Eigenschaft.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß schon Kottler das Unbefriedigende in dem Einsteinschen Beweis für die Notwendigkeit, die Euklidizität unseres Raumes aufzugeben, bemerkt hat, ohne jedoch die Frage genügend aufzuklären[1]). Herglotz[2]) diskutiert im Sonderfall euklidischer Weltgeometrie vollständig die Kinematik der hier als bevorzugt bezeichneten Bezugskörper; bei ihm findet sich zuerst die Form $d\sigma^2$. Weyl bestimmt die räumliche Geometrie rechnerisch aus dem Verha ten von Lichtsignalen, nicht durch Maßstäbe[3]). Auch Mie[4]) nimmt einen von dem hier Ausgeführten abweichenden Standpunkt ein. Er sieht das Schwerefeld als unabhängig von Maßstäben und Uhren gegeben an.

Zusammenfassung.

Auf Grund eines Axioms werden allgemeingültige Beziehungen zwischen Streckengeometrie und Weltgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie angegeben und damit die widerspruchsvollen und unvollständigen Aussagen aufgeklärt, die sich hierüber in der Literatur finden. Ferner wird nachgewiesen, daß die Lichtgeschwindigkeit, wenn sie invariant definiert wird, nie von der Richtung des ausgesandten Lichtstrahls abhängt, und zugleich gezeigt, daß die ursprüngliche physikalische Bedeutung der Weltmetrik wie in der speziellen Relativitätstheorie in dem charakteristischen Verhalten von Maßstäben und Lichtsignalen erblickt werden kann. Während nämlich die Gravitationswirkungen des g-Feldes für sich nicht genügen, es zu messen, leistet dies prinzipiell die Lichtuhr.

Bemerkung bei der Korrektur: Auf die Arbeiten von Kottler „Rotierende Bezugssysteme in einer Minkowskischen Welt“[5]), die zum Teil denselben Gegenstand behandeln, wurde ich erst nach der Einsendung des Manuskriptes aufmerksam gemacht.

1) Ann. d. Phys. **56**, 459, 1918.
2) Ann. d. Phys. **31**, 393, 1910.
3) l. c. und „Raum, Zeit, Materie“, 4. Aufl., S. 207.
4) Ann d. Phys. **62**, 46, 1920.
5) Diese Zeitschr. **22**, 274 u. 480, 1921.

(Eingegangen 11. Januar 1923.)

Über die Anwendung einer Beleuchtungsazimutblende bei koaxialer Dunkelfeldbeleuchtung.

Von A. Szegvári.

(Mit Tafel V.)

Die verschiedenen Methoden der Dunkelfeldbeleuchtung kann man, wenn man von der erzielten Lichtstärke absieht, in zwei Gruppen einteilen; erstens in solche, bei denen das Objekt nicht von jedem Azimut, sondern nur einseitig beleuchtet wird; zweitens in solche, bei denen die Beleuchtung allseitig, also von jedem Azimut gleichmäßig erfolgt. „Azimut" nennt man eine Richtung, die senkrecht zur optischen Achse des Mikroskopes steht; es wird bestimmt durch den Winkel, den eine durch diese Richtung und die optische Achse gehende Ebene mit einer bestimmten, ebenfalls durch die optische Achse gehenden Bezugsebene einschließt.

Systeme mit einseitiger Beleuchtung sind z. B. diejenigen von Siedentopf und Zsigmondy (Spaltultramikroskop), Cotton und Mouton, und das Immersionsultramikroskop von Zsigmondy. Obzwar diese, wohl in erster Linie das Spaltultramikroskop, viel geleistet haben, war man doch bestrebt, eine wirksame koaxiale Dunkelfeldbeleuchtung zu schaffen, bei der die Beleuchtung des Objektes von jedem Azimut, also allseitig, erfolgt. Die Paraboloidkondensoren von Wenham, Siedentopf, der lichtstärkere Kardioidkondensor von Siedentopf, der Spiegelkondensor von Ignatowsky und etliche andere waren die Resultate dieser Bestrebungen.

Der Grund, warum man allseitige Beleuchtung anzuwenden bestrebt war, lag teilweise in einer eigentümlichen Wirkung der einseitigen Beleuchtung, die als „Azimutfehler" bezeichnet wurde. Die Theorie des letzteren hat Siedentopf[1]) gegeben. Kurz gefaßt besteht sie darin (wenn wir von den Polarisationsverhältnissen des Lichtes absehen), daß ein ultramikroskopisches Element, welches in einer Richtung bevorzugte Ausmaße hat, — so z. B. ein Stäbchen, welches im Querschnitt ultramikroskopisch, aber der Länge nach mikroskopisch ist, — nicht in jede Richtung Licht abbeugt. Wie Siedentopf bei solch einem Stäbchen zeigte, befindet sich abgebeugte Intensität nur auf einem Kegelmantel, dessen Achse die Längsausdehnung des beleuchteten Elementes, und dessen Erzeugende der Beleuchtungsstrahl selber ist.

Wenn z. B. so ein Stäbchen oder eine Grenzfläche parallel mit den beleuchtenden Strahlen

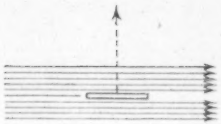


Fig. 1a.

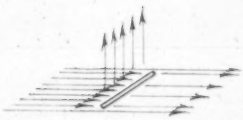


Fig. 1b.

gerichtet ist, und wir beobachten, wie im Spaltultramikroskop senkrecht zu den beleuchtenden Strahlen (Fig. 1a), so werden die vorerwähnten Objektelemente unsichtbar sein. (In diesem speziellen Falle werden sie überhaupt in keine Richtung Licht abbeugen.) Drehen wir nun das Stäbchen um eine Achse, die mit der Beobachtungsrichtung parallel ist, so wird das Stäbchen von einer bestimmten Stellung an aufleuchten und erhält seine größte Helligkeit, wenn es zur Strahlrichtung senkrecht steht[1]) (Fig. 1b).

Dieses Verhalten könnte zu vielen Irrtümern bei der Deutung des mikroskopisches Bildes Anlaß geben[2]), die bei allseitiger Beleuchtung — z. B. der des Kardioidkondensors —, ausgeschaltet sind.

Nun könnte aber die Tatsache, daß das Verhalten von Objektelementen mit einem bevorzugten Ausmaß bei der Dunkelfeldbeleuchtung vom Azimut der Beleuchtungsstrahlen abhängt, dazu dienen, um sich grade hierdurch von ihrem Vorhandensein zu überzeugen, oder um sich von ihrer Verteilung, Häufigkeit, Richtung usw. im untersuchten Objekte auf eine einfache Weise zu unterrichten. Dazu ist es aber nicht genügend, daß man das Objekt von einem Azimut aus beleuchtet, wie es z. B. im Spaltultramikroskop geschieht[3]). Man muß vielmehr dem Beleuchtungsazimut jede beliebige Richtung geben können; erstens, um den Azimuteffekt — wie man den Azimutfehler vielleicht richtiger nennen kann — in jeder Richtung beobachten zu können; zweitens, um sich zu überzeugen, inwiefern ein beobachteter Azimut-

1) Siedentopf, Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie **29**, 1, 1912.

1) Siedentopf, Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie **24**, 104, 1907.
2) Siedentopf, Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie **25**, 424, 1909.
3) Kruyt, Kolloid-Zeitschr. **19**, 161, 1916.

effekt überhaupt als ein solcher anzusprechen ist, was im Spaltultramikroskop, wo das Beleuchtungsazimut unveränderlich ist, ja überhaupt nicht zu entscheiden ist. Aus letzterem Grunde wäre es ferner erforderlich, die einseitige Beleuchtung mit der allseitigen bei der Untersuchung leicht und einfach abwechseln zu können.

Diesen Forderungen kann man nun auf folgende einfache Weise Genüge leisten. Den Kondensoren für koaxiale allseitige Dunkelfeldbeleuchtung, z. B. dem Kardioidkondensor, wird ein paralleles Strahlenbündel zugeführt. Dieses Strahlenbündel tritt durch eine ring- oder kreisförmige Blende in den Kondensor ein. Jedem Teil dieser Blende entsprechen Strahlen von einem bestimmten Azimut im Lichtkegel, den der Kondensor erzeugt, und dessen Spitze im zu untersuchenden Objekt liegt. Werden nun gewisse Teile dieser Öffnung abgeblendet, bzw. freigelassen, so werden im Beleuchtungskegel nur Strahlen von einem gewissen Azimut vorhanden sein.

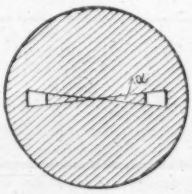


Fig. 2a.

Zu diesem Zwecke setzt man eine Blende von der Form[1]) Fig. 2a in den Strahlengang vor den Kondensor; man befestigt sie am einfachsten drehbar um die optische Achse in dem unteren Teil der Kondensorfassung (siehe die schematische Fig. 2b). In der Figur sind die Blenden *A* und *B* perspektivisch, der Kondensor (Kardioid) im Durchschnitt angedeutet. *B* ist die im Kardioidkondensor vorhandene Ringblende.

Siedentopf machte bereits vor einigen Jahren auf die Wirksamkeit einer derartigen Blende aufmerksam, gelegentlich eines mikroskopischen Planktonpräparates, das er mit einem Abbeschen Kondensor beleuchtete[2]).

Diese Blende wirkt nun als Beleuchtungs-Azimutblende; das Objekt erhält nur Strahlen von solchen Azimuten, die durch Größe und Lage des Winkels α bestimmt sind (Fig. 2a).

Man bekommt also streng genommen nicht aus einer einzigen Richtung, sondern von einem beschränkten Winkelbereich α aus Licht aufs Objekt. Je kleiner man diesen Winkel α wählt, umso reiner tritt der Azimuteffekt auf, aber

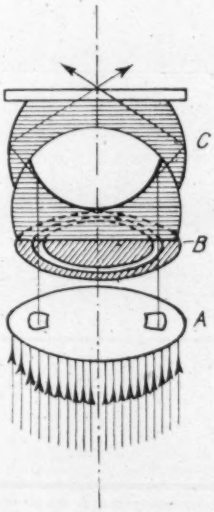


Fig. 2b.

umso kleiner ist auch die Lichtstärke. Ferner beleuchtet man so eigentlich mit zwei Azimutbereichen, die um 180° voneinander getrennt sind; hierdurch wird der Azimuteffekt nicht verschlechtert, wohl aber die Lichtstärke verdoppelt.

Es seien nun einige Anwendungsmöglichkeiten der Azimutblende aufgezählt.

1. Die Untersuchung der Stäbchensole wird sehr erleichtert und ihre Erkennung als solche vereinfacht. Besonders schön zeigt dies das Vanadinpentoxydsol[1]), auf welches in dieser Beziehung im weiteren noch zurückgekehrt werden möge. Fig. 3 zeigt das Bild des Vanadinpentoxydsols bei 200facher linearer Vergrößerung mit dem Kardioidkondensor; Fig. 4 u. 5 zeigen die Aufnahmen derselben Stelle des Präparates, aber mit vor dem Kardioid geschalteter Azimutblende. Es steht die Azimutblende in

1) Der Ausschnitt der Azimutblende in Fig. 2a ist so gestaltet, daß sie zum Kardioid paßt; zu anderen Kondensoren würde eine, nur wenig von der obigen Form abweichende Azimutblende passen.

2) Siedentopf, Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie **25**, 424, 1909.

1) Siehe Diesselhorst, Freundlich u. Leonhardt, Elster-Geitel-Festschrift 1915, S. 453; Diesselhorst u. Freundlich, diese Zeitschr. **16**, 422, 1915.

Fig. 4 senkrecht zu ihrer Stellung bei der Aufnahme von Fig. 5.

In jeder dieser beiden Aufnahmen sieht man nur diejenigen Stäbchen hell, die senkrecht zur Beleuchtungsrichtung liegen, und zwar in einem kleinen Winkelbereich um diese Senkrechte herum. Man sieht, daß in Fig. 5 (Taf. V) gerade diejenigen Stellen hell sind, die in Fig. 4 (Taf. V) völlig dunkel erscheinen und umgekehrt. Aus diesem Verhalten kann man viele Annahmen über die Konstitution des Vanadinpentoxydsols bestätigen, und auch vielleicht neue Schlüsse ziehen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Die Untersuchung, ob Gele oder Niederschläge Stäbchen oder auch scheibchenartige Teilchen enthalten, oder aus ihnen aufgebaut sind, wird ermöglicht, selbst dann, wenn es aus dem sonstigen mikroskopischen oder ultramikroskopischen Bild nicht zu erkennen wäre. Denn so ein Teilchen muß sich, wenn es bei einer Stellung der Azimutblende hell war, durch eine gewisse Verdrehung der letzteren verdunkeln, aus Gründen, die bereits angeführt wurden. So kann man sich z. B. von den Teilchen, die das Koagel eines alten Eisenoxydsoles aufbauen, feststellen, daß sie bei Drehung der Azimutblende „auslöschen", — also in einer Richtung ein bevorzugtes Ausmaß haben müssen.

Sind sehr lichtschwache Stäbchen oder Scheibchen neben viel isometrischen (und isotropen) Objekten vorhanden, die keinen Azimuteffekt zeigen, so ist die Erkennung der ersteren bei Anwendung der Azimutblende dadurch erleichtert, daß die Stäbchen oder Scheibchen, die gerade bei dem zufälligen Beleuchtungsazimut sichtbar sind, mit fast der völligen Intensität leuchten wie ohne Anwendung der Azimutblende; sämtliche übrigen Elemente des Objektes erscheinen aber wesentlich dunkler, da sie ja jetzt nur von einem kleinen Azimutbereich kommendes Licht abbeugen, während sie ohne Azimutblende Licht, welches von jedem Azimut kommt, abbeugen könnten[1]).

2. Das ultramikroskopische Funkelphänomen[2]) wird viel deutlicher bei Anwendung der Azimutblende. Dies ist von gewisser Bedeutung, da dies Phänomen wahrscheinlich in vielen Fällen die empfindlichste Erscheinung ist, die man ultramikroskopisch an der Grenze des Amikronischen wahrnehmen kann. Das Funkelphänomen wird betrachtet als eine Folge des Azimuteffektes bei hochdispersen Stäbchen- und Scheibchensolen, der durch die Rotationskomponente der Brownschen Bewegung bedingt wird[1]). Das Funkeln tritt ja darum auf, weil z. B. sehr kleine Stäbchen nur unter den eingangs erwähnten Bedingungen Licht in einer gewissen Richtung, z. B. Beobachtungsrichtung, senden. Nehmen wir nun solch ein Stäbchen an, welches grade in einer Stellung ist, in der es Licht nach der Beobachtungsrichtung abbeugt, also hell erscheint; durch die Rotationskomponente der Brownschen Bewegung wird nun bewirkt, daß das Stäbchen sich aus dieser bevorzugten Richtung herausdreht und somit verdunkelt wird und umgekehrt. Durch Beleuchtung mit nur einem Azimut wird nun die Wahrscheinlichkeit dessen, daß ein gerade helles Teilchen wieder verdunkelt wird, stark vergrößert. Die erzielte Wirkung ist also, daß man im Durchschnitt weniger Teilchen, aber mit viel „rascherem Tempo" funkeln sieht; dies erleichtert sehr die subjektive Wahnehmung der Erscheinung.

Als Beispiele hierfür mögen alte Eisenoxydsolen dienen, welche sich auch aus ihrem anderen Verhalten wohl als Scheibchensolen erweisen[2]).

Es mögen hier einige Erwägungen über die theoretische Behandlung der aufgezählten Erscheinungen folgen. Wie bereits erwähnt wurde, hat Siedentopf eine Theorie des Azimuteffektes sowie des Funkelphänomens im Zusammenhang mit der mikroskopischen Abbildung dieser Erscheinungen entworfen. Diese Theorie beschränkt sich aber streng auf solche linienförmigen Elemente, die in der Querdimension ultramikroskopisch, in der Längsdimension aber mikroskopisch, demnach größer als eine halbe Lichtwellenlänge sind. Das Wesen dieser Theorie besteht darin, daß man solche Elemente der Querdimension nach bloß als ein einziges Störungszentrum behandeln kann, der Länge nach aber die Huyghenssche Wellenkonstruktion anwenden darf. Wird so ein Element von einem ausgedehnten Lichtstrahl getroffen, so wird es als eine Reihe nebeneinander liegender Störungszentren angesehen, und die abgebeugte Welle kann man einfach als die Einhüllende der von den nebeneinander liegenden Störungszentren ausgehenden Elementarwellen bestimmen. Offenbar ist diese Konstruktion nicht anwendbar, wenn das beugende, linienförmige Objekt auch seiner Längsdimension nach ultramikroskopisch ist, — und folgerichtig aus dieser Auffassung definiert auch Siedentopf als „punktförmige" Objekte solche, die in jeder Dimension kleiner als eine halbe Lichtwellenlänge sind.

1) Siedentopf, Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie **25**, 424, 1909.
2) Amann, Kolloid-Zeitschr. **7**, 70, 1910.

1) Siedentopf, Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie **29**, 1, 1912.
2) Zocher, Zeitschr. f. phys. Chem. **98**, 313, 1921.

Nun ist es aber wahrscheinlich, daß diese Betrachtungsweise die Erscheinungen nicht vollständig beschreibt. Denn erstens ist nach den bisherigen Beobachtungen wohl anzunehmen, daß ausgeprägte Stäbchensole Teilchen enthalten, die auch in der Längsdimension ultramikroskopisch sind und trotzdem funkeln, auch gelegentlich den Azimuteffekt beim Drehen der Azimutblende zeigen. Und zweitens, kennen wir Sole, z. B. das Eisenoxydsol, deren Teilchen ganz sicher in jeder Dimension ultramikroskopisch, also „punktförmige" Objekte sind, und trotzdem unter geeigneten Umständen auffallend funkeln. Wie erwähnt wurde, sind die Teilchen dieser Sole ultramikroskopische Scheibchen; diesen Umstand beschreibt die Theorie von Siedentopf wohl auch nicht.

Zur Beschreibung dieser Erscheinungen genügt die Anwendung der geometrischen Optik und der formalen Wellenlehre nicht, man muß vielmehr auf den primären Effekt zurückgreifen — auf den Verlauf der elektromagnetischen Störungen, die ein kleines Teilchen in einem Lichtbündel verursacht, — wie es in den Betrachtungen von Diesselhorst und Freundlich[1]) und den Berechnungen von Gans[2]) geschieht.

3. Durch Anwendung der Azimutblende kann man sich auch oft über das Vorhandensein orientierter Verbände von submikroskopischen Stäbchen oder Scheibchen überzeugen. Bilden solche Teilchen einen orientierten Verband, z. B. „Schwärme" nach Freundlich[3]), so muß dies bei der Untersuchung mit der Azimutblende besonders augenfällig sein. Man sieht ja dann im ganzen Gesichtsfeld nur solche Teilchen, die eine bestimmte Orientierung haben; findet man nun bei einer gewissen Stellung der Azimutblende diese nicht im ganzen Gesichtsfeld ungleichmäßig verstreut, sondern haben solche Elemente irgendeine ausgezeichnete Verteilung, so kann man auf orientierte Verbände schließen. Ein schönes Beispiel hierzu ist das Vanadinpentoxydsol (Fig. 4 u. 5, Taf. V).

Das Bisherige zusammengefaßt, erleichtert also der Azimuteffekt die Folgerung auf Teilchengestalt und Teilchenverteilung in jenem Gebiet, welches unter der Auflösungsgrenze, also der objekttreuen Abbildung des Mikroskopes liegt.

4. Großes kolloidchemisches und biologisches Interesse hat die ultramikroskopische Untersuchung von Grenzflächen. Diese Untersuchung wird sehr erschwert durch die starke Lichtabbeugung, die an einer etwas ausgedehnteren Grenzfläche entsteht. Besteht ein beträchtliche Unterschied der Brechungsexponenten zwischen beiden Medien, die sich in der Grenzfläche berühren, so kann das abgebeugte Licht einen solchen Grad der Intensität erreichen, daß es die Beobachtung in der Nähe der Grenzfläche unmöglich macht. So z. B. in Fig. 6, welches die Aufnahme einer Grenzfläche Vanadinpentoxydsol—Luft, zwischen Objektträger und Deckglas erzeugt, zeigt. Verwendet man nun die Azimutblende in einer solchen Stellung, in der die Beleuchtungsstrahlen parallel zu der zu beobachtenden Grenzfläche einfallen, so wird die Lichtabbeugung der Grenzfläche selber vollständig vermieden. Fig. 7 (Taf. V) zeigt dieselbe Grenzfläche wie Fig. 6 (Taf. V), aber unter Benutzung einer entsprechend gestellten Azimutblende. Die Richtung des angewandten Beleuchtungsazimutes ist in Fig. 7 (Taf. V) aus der Richtung der sichtbaren Stäbchen zu schließen[1]).

5. Durch die Beleuchtung mit nur einem Azimut sind die optischen Bedingungen für die Untersuchung des ultramikroskopischen Bildes bei koaxialer Dunkelfeldbeleuchtung auf seine Polarisationseigenschaften gegeben. Durch einen koaxialen Dunkelfeldkondensor mit spiegelnden Flächen kann man nämlich das zu untersuchende Objekt nicht mit polarisiertem Licht beleuchten; denn diese spiegelnden Teile bilden eine Rotationsfläche (z. B. Rotationskardioid) um die Achse des eintretenden — und etwa polarisierten — Strahlenbündels. Bei der Reflexion an den vorerwähnten spiegelnden Rotationsflächen entspricht jedem Azimut eine Einfallsebene, letztere schließt daher alle möglichen Winkel mit der Polarisationsebene des (etwa) polarisierten Lichtbündels ein.

Bei der Reflexion von polarisiertem Licht wird nun an dem Polarisationszustand des Lichtes nur dann nichts geändert, wenn die Einfallsebene parallel oder senkrecht zur Schwingungsebene des polarisierten Lichtes steht. Im allgemeinen Fall verwandelt sich im Falle von Totalreflexion oder metallischer Reflexion die Linearpolarisation nach der Reflexion in elliptische; — das in einer Ebene linear polarisierte Licht hat demnach nach dem Durchsetzen so eines Kondensors auch Schwingungskomponenten senkrecht zur früheren Schwingungsebene.

Dies wird vermieden, wenn man das polarisierte Licht durch eine Azimutblende in den Kondensor eintreten läßt, wobei die Azimutblende senkrecht oder parallel mit der Schwin-

1) Diese Zeitschr. **17**, 117, 1916.
2) Ann. d. Phys. (4) **37**, 881, 1912.
3) Zeitschr. f. Elektrochem. **22**, 27, 1916.

1) Im Luftraum (rechts von der Grenzfläche) sieht man auch einige Stäbchen, die an der Glasoberfläche des Objektträgers adsorbiert sind, da ursprünglich das ganze Gesichtsfeld mit dem Sol erfüllt war und die Grenzfläche erst später erzeugt wurde.

gungsrichtung des Lichtes gerichtet ist; hierdurch werden nämlich die Reflexionen, bei welchen elliptisch polarisiertes Licht entsteht, praktisch ausgeschaltet. Man kann demnach die Polarisationseigenschaften des abgebeugten Lichtes auf ihre Abhängigkeit sowohl vom Beleuchtungsazimut wie vom Polarisationszustand des beleuchtenden Lichtes untersuchen. So bietet sich hierdurch unter anderem eine bequeme Methode für die Untersuchung des Dityndallismus[1]). Auf dies soll ebenfalls noch im späteren zurückgekehrt werden.

1) Zocher, Zeitschr. f. phys. Chem. 98. 316, 1921.

Ich möchte endlich Herrn Professor Freundlich für seine vielseitigen Ratschläge, sowie für sein Interesse, mit dem er den laufenden Versuchen beiwohnte, und Herrn Dr. Zocher, der seine auf diesem Gebiet liegenden reichen Erfahrungen zur Verfügung stellte, danken.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.

(Eingegangen 28. Januar 1923.)

BESPRECHUNGEN.

H. A. Lorentz, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, nebst einer Einführung in andere Teile der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften. (Übersetzt von G. C. Schmidt.) 8°. VI u. 602 S. Mit 122 Fig. Leipzig, Joh. Ambr. Barth. 1922. M. 90.—, geb. M. 115.—.

Wie schon der Titel sagt, wendet sich das vorliegende Werk vor allem an Studierende der Naturwissenschaften, und diese können sich in der Tat keine bessere Einführung wünschen als das Lorentzsche Lehrbuch.

Das Buch enthält die Elemente der Determinantenrechnung, eine ausführliche Darstellung der Differential- und Integralrechnung und einige Betrachtungen über Differentialgleichungen. Neu hinzugekommen ist in der vierten Auflage eine kurze Einführung in die Grundbegriffe der mehrdimensionalen Geometrie. Am Schluß hat der Übersetzer eine übersichtliche Zusammenstellung der wichtigsten Formeln gegeben.

Die Darstellung ist überall sehr faßlich und anschaulich; die Aneignung des Stoffes wird durch viele Beispiele und Übungsaufgaben (deren Lösungen im Anhang gegeben sind) erleichtert. Vor allem wird die Einführung jedes wichtigen Begriffes durch ein oder mehrere geeignete Beispiele vorbereitet: So führen die Beispiele der kontinuierlichen Verzinsung und der Absorption des Lichtes auf die Zahl e, die Definition des Differentialquotienten wird in bekannter Weise durch die Erörterung des Geschwindigkeitsbegriffes und der Tangentenrichtung vorbereitet, das Integral wird zuerst als bestimmtes Integral eingeführt und als Flächeninhalt erklärt, und werden einige einfache Quadraturen auf Grund der Sätze über arithmetrische Reihen ausgeführt. P. Hertz.

James Walker, Einführung in die physikalische Chemie. gr. 8°. VII u. 488 S. m, 65 Abbildungen. 3. vermehrte Auflage. 8°. VIII u. 494 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1921. Geh. M. 68.—, geb. M. 80. —.

Die vorliegende „Einführung" gehört zu der Klasse der Bücher ihrer Art, die ihren Stoff mehr von der chemischen Seite ausgehend behandeln, als es im allgemeinen heutzutage üblich ist und entspricht insofern dem historischen Entwicklungsgange der physikalischen Chemie. Von einer Zusammenfassung einzelner Kapitel zu größeren Unterabteilungen hat der Verfasser abgesehen, ohne dadurch die Übersichtlichkeit des Ganzen zu vermindern. Im Gegenteil muß die geschlossene Darstellung und die unverkennbar angestrebte natürliche Verknüpfung der einzelnen Kapitel hervorgehoben werden, die dem Anfänger, für den das Buch in erster Linie bestimmt ist, den Überblick über das Gebiet sehr erleichtern. Inhaltlich hat das Buch mit der Entwicklung der physikalischen Chemie Schritt gehalten; die Darstellung ist zwar elementar gehalten, aber wohl durchdacht. An zwei Stellen erscheint dem Referenten eine Revision bzw. Ergänzung erwünscht. S. 175 bei Behandlung der optischen Aktivität ist unerwähnt geblieben, daß Asymmetrie des Moleküls ihre notwendige und hinreichende Voraussetzung ist, worauf besonders F. M. Jaeger-Groningen hingewiesen hat. Auf S. 400 findet sich eine Darstellung des elektrolytischen Lösungsdrucks, die Verwirrung zu stiften geeignet ist. Sie geht aus von der — leicht zu weit getriebenen — Analogie mit der Auflösung eines Stoffes in Wasser und fährt fort: „ . . . Dieser Tendenz wird das Gleichgewicht gehalten durch den osmotischen Druck des Zinkions, das sich in der Lösung befindet, und es gibt dementsprechend einen bestimmten osmotischen Druck der Zinkionen, bei dem weder metallisches Zink gelöst, noch aus der Lösung niedergeschlagen wird. Dieser bestimmte osmotische Druck, der gerade die Lösungstension des Zinks aufwiegt, heißt der elektrolytische Lösungsdruck des Zinks". Obwohl im folgenden die Verhältnisse klar und verständlich auseinandergesetzt sind, kann die zitierte Darstellung (die sich übrigens auch sonst gelegentlich findet), zu der falschen Vorstellung führen, daß Gleichgewicht eintritt bei Gleichheit von osmotischem Druck und Lösungstension, während besser schon hier die Aufladung des Zinks und der Begriff der elektrischen Doppelschicht einzuführen und zu betonen wäre, daß im allgemeinen osmotischer Druck und elektrostatische Aufladung zusammen der Lösungstension das Gleichgewicht halten. Eine abgerundetere Fassung des Schlußkapitels „thermodynamische Beweise", eine Ergänzung der Literaturangaben durch reichlicheres Zitieren von Originalarbeiten im Text als Fußnoten, endlich das Beidrucken von Stichwörtern an den Rand des Textes würden das wertvolle und weiteste Verbreitung verdienende Buch noch vervollkommnen. S. Kyropoulos.

N. Bohr, Drei Aufsätze über Spektren und Atombau. (Sammlung Vieweg.) Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik. Heft 56. Herausgegeben von K. Scheel. 8°. VI u. 148 S. m. 9 Abbildungen. Braunschweig, Fried. Vieweg & Sohn Akt.-Ges. 1922. Geh. M. 120.— freibleibend.

Im Heft 56 der bekannten Sammlung Vieweg sind drei Aufsätze von N. Bohr wiedergegeben, die uns über die Anwendung der Quantentheorie auf die Fragen des Atombaus Aufschluß geben. Die erste Abhandlung findet sich bereits in „Fysisk Tidsskrift" (Bd. 12, 1914), die beiden andern stehen in der Zeitschrift für Physik (Bd. 2, 1920 u Bd. 9, 1922). Die Zusammenstellung dieser drei Abhandlungen ist ein überaus verdienstvolles Werk, denn so erkennt man deutlich die stetig fortschreitende Entwickluug der neueren Theorie des Atombaus.

Der erste Teil handelt „von dem Wasserspektrum" als dem Fundament, von dem aus man zur Aufstellung einer Theorie für den Bau der Atome und Moleküle geleitet wird. Der zweite Teil hat die Überschrift: „Über die Serienspektren der Elemente". Er gliedert sich in drei Abschnitte. Im ersten werden im wesentlichen die Fragen behandelt, die sich in den Abhandlungen des Verfassers über den Atombau in den Jahren 1913—16 finden (Deutsche Übersetzung von H. Hintzing, Fried. Vieweg & Sohn 1921.) Im zweiten Abschnitt ist eine Übersicht über die Resultate gegeben, die die überaus schnelle Entwicklung der Quantentheorie gezeitigt hat, hauptsächlich wird das Wasserstoffspektrum berücksichtigt. Im dritten Abschnitt werden dann die genannten Gesichtspunkte auf die Frage nach dem Bau der Spektren von Atomen angewandt, in denen zwei oder mehrere Elektronen kreisen. Der dritte Teil umfaßt „den Bau der Atome und die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Elemente". Nach N. Bohr ist der Hauptzweck dieses Teiles der, die Hauptzüge eines Bildes des Atombaus zu entwerfen, das auf einer quantentheoretischen Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse des Kernatoms im Lichte des Korrespondenzprinzips beruht. Unterteilt ist dieser Teil in vier Abschnitte. Der erste enthält eine Übersicht der Resultate der Theorie des Atombaus; im zweiten werden die für die Untersuchung wichtigsten Gesichtspunkte auseinandergesetzt; im dritten findet sich dann das glänzende Resultat, daß die erläuterten Gesichtspunkte zu Vorstellungen über den Atombau zu führen scheinen, die geeignet sind, sowohl von den spektralen wie von den chemischen Eigenschaften der Elemente, wie diese im periodischen Systeme zum Vorschein kommen, in großen Zügen Rechenschaft zu geben"; und schließlich wird im vierten Abschnitt die Erklärung der Röntgenspektren auf Grund der gewonnenen theoretischen Gesichtspunkte gegeben.

Es ist eine wahre Freude, den klaren Ausführungen N. Bohrs zu folgen. Das Heft 56 der Sammlung Vieweg wird sicherlich eine große Verbreitung finden.

Karl Bergwitz.

J. Villey, Physique élémentaire et théories modernes. I. partie: Molecules et atomes. gr. 8°. X u. 197 S. m. 23 Figuren im Text. Paris, Gauthier-Villars. 1921. Geh. fr. 15.

Das Buch setzt die Kenntnis der elementaren Experimentalphysik voraus und ist für solche Studierende bestimmt, die ohne Kenntnis der höheren Mathematik die theoretischen Grundlagen und die modernen Theorien der Physik kennen lernen wollen. Der vorliegende erste Teil behandelt die Erscheinungen des Gleichgewichts und der Bewegung der Materie, also die Mechanik des Punktes, der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, die Wärmelehre, die elastischen Wellen und die Akustik. Daran schließt sich noch ein ganz kurzer Überblick über die Atomtheorie. Leicht verständlich werden in allen diesen Gebieten die wichtigsten Theorien elementar behandelt. Weil höhere Mathematik nicht gebraucht wird, so ist die Darstellung manchmal etwas breit und umständlich, aber für den Leserkreis, für den das Buch bestimmt ist, durchaus passend, geschickt und gut.

E. Götting.

R. Grammel, Die mechanischen Beweise für die Bewegungen der Erde. gr. 8°. VI u. 71 S. M. 25 Textabbildungen. Berlin, J. Springer. 1922. Geh. M. 24.—.

Das Buch ist ein erweiterter Abdruck eines längeren Aufsatzes, den der Verfasser 1921 in den „Naturwissenschaften" veröffentlichte. In der Einleitung wird gezeigt, daß die Beweise für die Bewegung der Erde nur den Sinn haben können zu beweisen, daß ein mit der Erde fest verbundenes Bezugssystem in ganz bestimmter Art von einem Inertialsystem abweicht; ferner werden darin die mechanischen Grundlagen für die im Hauptteil folgenden Beweise entwickelt. Dann wird in systematischer Anordnung über alle Methoden zum Beweise der Erddrehung, auch über die, die ohne Erfolg blieben, und über die Genauigkeit der Messung berichtet. Die Darstellung ist allgemeinverständlich, aber für den, der tiefer eindringen will, sind ausführliche Literaturangaben und in klein gedruckten Abschnitten auch die mathematischen Ableitungen zugefügt.

E. Götting.

J. Perrin, Die Atome. Deutsch von A. Lottermoser. 2. Auflage. XX u. 196 S. Dresden, Th. Steinkopff. 1920. M. 36.— u. T.-Z.

Dieses ausgezeichnete Werk bedarf nach dem großen Erfolg der 1. Auflage keiner Empfehlung mehr. Die nunmehr erschienene Neuauflage ist absichtlich fast unverändert gehalten, um dem Buch seine Ursprünglichkeit zu bewahren, wie der Herausgeber ausdrücklich betont.

Sehr zu begrüßen sind eine Reihe von Korrekturen, namentlich solche numerischer Art, welche sich in störender Weise in die erste Auflage eingeschlichen hatten. Das Buch wird auch jetzt noch das Beste sein, das in gemeinverständlicher Weise ein Bild von der Molekularbewegung entwirft.

O. Schärer.

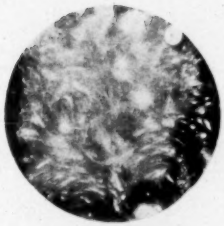
Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität München Dr. H. Schlee für pharmazeutische und angewandte Chemie, an der Universität Hamburg Dr. H. Holthusen für Radiologie.

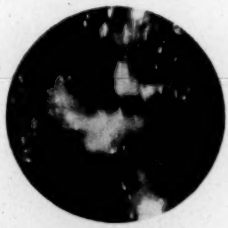
Gestorben: Der Mitinhaber der Chemischen Fabrik E. Merck in Darmstadt Geh. Kommerzienrat Dr. E. A. Merck.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Hans Küstner in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Ohne Azimutblende

Fig. 3



Azimutblende —

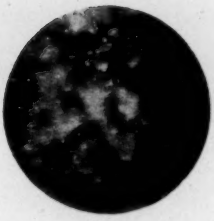
Fig. 4.

Azimutblende |

Fig. 5.

Ohne Azimutblende

Fig. 6.



Azimutblende |

Fig. 7.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

Max Kohl A.G. Chemnitz

50471. Experimentier-Schalttafel Type A_1, 110 Volt, 30 Amp.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

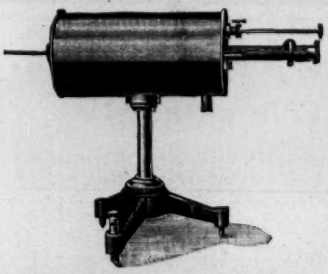
Experimentier-Schalttafeln

Projektions-Apparate

Laboratorienmöbel

In gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel: 4 Grosse Preise; Turin: 2 Grosse Preise; Dresden: Grosser Preis.



Apparate für luftelektrische und radioaktive Untersuchungen.
Normalbatterie für elektrostatische Messungen.
Kondensatoren, Mikrowage.
Erdbebenregistrierapparate.

Spindler & Hoyer G.m.b.H.
Mechan. u. opt. Werkstätten
Göttingen 3.

Hochspannungs-Batterien

Vorzüge: Größte Leistung bei kleinstem Raum. Beliebige Trennbarkeit. Niedriger Preis.

Phywe-Hochspannungsbatterien
haben u. a. im Gebrauch:

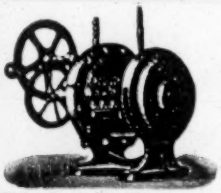
Kaiser Wilhelm-Institut, Dahlem. — Institut für Experimentalphysik, Universität Göttingen. — Institut für theoret. Physik, Universität Göttingen. — Physikal. Institut der Bergakademie Clausthal. — Röntgen-Institut, Techn. Hochschule Stuttgart. — Physikalisches Institut, Universität Frankfurt. — Physikal.-Chem. Institut, Technische Hochschule Karlsruhe. — Physikalisches Institut, Technische Hochschule Karlsruhe. — Teyler-Museum, Universität Leiden-Haarlem. — Radium-Institut, Freiberg i. S. — Institut für Schwachstromtechnik, Dresden. — Realgymnasium Schweln. — Institut für theoretische und physikalische Chemie, Freies Bildungswesen, Altona. — Natuurkundig Laboratorium der Universität Groningen. — Porzellanfabrik Rosenthal, Selb. — Institut für theoretische und physikalische Chemie, Universität Brünn. — Physikalisches Institut. Universität Wilna. — Chemische Fabrik Griesheim-Elektron, Griesheim. — Kaiser Wilhelm-Institut. Düsseldorf. — Physikalisches Institut. Universität Czernauti. — Physikalisches Laboratorium der medizinischen Fakultät, Posen. — Physikalisches Institut, Universität Helsingfors. — Koch & Sterzel, Dresden. — W. C. Heraeus, Hanau.

Physikalische Werkstätten A.-G.,
Göttingen 1

Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Gegründet 1890

Fabrik physikalischer, chemischer und technischer Apparate

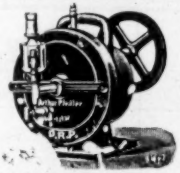


Rotier. Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Pfeiffer. D. R. P.

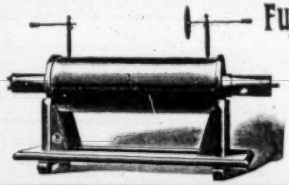
Spezialfabrik für Hochvakuumpumpen

zu wissenschaftlichen und technischen Zwecken

Alle Arten Luftpumpen, Kolben-Ölluftpumpen, rotierende Ölluftpumpen, rotierende Quecksilberluftpumpen für Betrieb und Laboratorium



Rotierende Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Gaede. D. R. P.



Funkeninduktoren bis 1000 mm Funkenlänge

Normaltypen von 6—1000 mm Funkenlänge mit Unterbrechern aller Art

Spezial-Funkeninduktoren für technische und wissenschaftliche Zwecke

•••••••• Listen kostenlos von Abteilung E verlangen. ••••••••

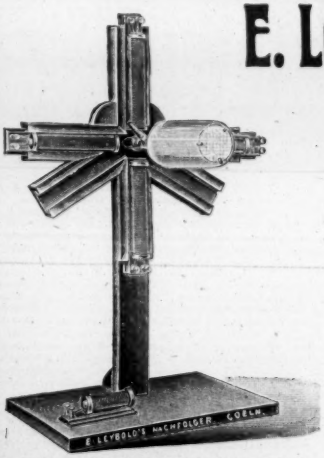
E. Leybold's Nachf. A.-G.

Cöln a/Rhein

Fabrik physikalischer Apparate

Zweigniederlassung:

Berlin NW 7, Dorotheenstraße 53



Universalstativ für Braun'sche Röhre nach Simon und Reich.

Projektionsapparate für Diaskopie und Episkopie

Hochvakuumpumpen nach Gaede

Katalog, enthaltend 16000 Nummern, wird Instituten auf Wunsch übersandt.

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.